ARTÍCULO 7

El Teorema del índice de Morse

OSCAR BOBARIN FLORES[1]

RAÚL BORDA[2]

Resúmen

Básicamente el teorema de ***Morse*** *es una generalización de un resultado clásico de Jacobi que afirma que un segmento de geodésica minimiza la longitud de arco relativamente a las curvas vecinas de mismas extremidades si y sólo si este segmento no posee puntos conjugados.*

7.1 Introducción

BÁSICAMENTE el teorema de **Morse** es una generalización de un resultado clásico de Jacobi que afirma que un segmento de geodésica minimiza la longitud de arco relativamente a las curvas vecinas de mismas extremidades si y sólo si este segmento no posee puntos conjugados.

7.2 El teorema del Índice

SEA la geodésica $\gamma : [0, a] \longrightarrow M^n$. Consideremos además el espacio vectorial $\psi(0, a) = \psi$ formado por los campos vectoriales V a lo largo de γ, de diferenciables por partes y tale que V(0)=V(a)=0. Definimos a la forma del índice de γ como la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica I_a definida en ψ por

$$I_a(V, W) = \int_0^a \left\{ \langle V', W' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W \rangle \right\} dt$$

En general el índice de una forma bilineal B en un espacio vectorial V a la dimensión máxima es un subespacio de ψ en el cual B es negativa definida. La nulidad de B es la dimensión del subespacio ψ formado por los elementos V de ψ tales que B(V,W)=0 para todo W $\in \psi$; tal subespacio es espacio nulo de B. Decimos que B es *degenerada* si su nulidad es estrictamente positiva.

Teorema 7.1 (Teorema del Índice de Morse). *El índice de la forma I_a es finito e igual al número de puntos $\gamma(t)$, $0 < t < a$, conjugados $\gamma(0)$, cada uno contado con su multiplicidad.*

La demostración está basada en las siguientes Proposiciones 7.2 y 7.3.

Proposición 7.2. *Un elemento de $V \in \psi$ pertenece al subespacio nulo de I_a si y sólo si V es un campo de Jacobi a lo largo de γ.*

[1]obobarinflores@gmail.com Universidad Mayor de San Andrés
[2]rbordav@gmail.com, Universidad Mayor de San Andrés

Demostración. Como V $\in V$, entonces V es un campo vectorial lo largo de γ diferenciable por partes, entonces apenas para un número finito de puntos $t_j : j = 1, 2..k-1$,

$$\frac{DV}{dt}(t_j^-) \neq \frac{DV}{dt}(t_j^+)$$

Ahora bien

$$\int_0^a \left\langle \frac{D^2V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma', W \right\rangle dt = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - R(\gamma', V)\gamma', W \right\rangle dt \right\}$$

Entonces

$$\int_0^a \left\langle \frac{D^2V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma', W \right\rangle dt = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right\} - I_a(V, W)$$

Así

$$I_a(V, W) = -\int_0^a \left\langle \frac{D^2V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma', W \right\rangle dt + \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-), W(t_i) \right\rangle$$

($\Longleftarrow$) Si V es un campo de Jacobi entonces

$$\frac{D^2V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma' = 0$$

Así, V pertenece al espacio nulo de $I_a(V, W)$, para todo W en Ψ

($\Longrightarrow$) Supongamos ahora que $I_a(V, W)$, para todo W en Ψ. Sea $0 \leq t_0 < t_1 < ..... < t_{k-1} < t_k = a$ una subdivisión de $[0, a]$ tal que la restricción $V_{|_{[t_{j-1}, t_j]}}$ es diferenciable,$j = 1, ..., k$

Sea $f : [0, a] \longrightarrow R$ una función diferenciable con $f(t) > 0$ y para $t \neq t_j$, y $f(t_j) = 0$
Como es verdad para todo W en Ψ, tenemos

$$W(t) = f(t)(V'' + R(\gamma', V)\gamma')$$

$$0 = I_a(V, W) = -\int_0^a \langle V'' + R(\gamma', V)\gamma', f(t)(V'' + R(\gamma', V)\gamma') \rangle \, dt = \int_0^a f(t) \|V'' + R(\gamma', V)\gamma'\|^2 dt$$

Entonces $\|V'' + R(\gamma', V)\gamma'\|^2 = 0$ y así cada $V_{|_{[t_{j-1}, t_j]}}$ son campos de Jacobi.
Para ver que ocurre en cada t_j, definimos $t \in V$ por

$$T(t_j) = \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-) \qquad j = 1, ..., k-1$$

Como

$$0 = I_a(V, W) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-) \right\|^2$$

entonces $V \in C^1$ en cada t_j. Por la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria,$V \in C^\infty$, así V es un campo de Jacobi. $\square$

Como cada punto de M está contenido en una vecindad totalmente normal y $\gamma_{|[0,a]}$ es compacto, podemos escoger una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < .... < t_k = a$ de $[0,a]$ tal que cada $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$, $j = 1,...,k$ esté contenido en una vecindad totalmente normal. Así cada $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$ es una geodésica minimizante.

Sea $\Psi^-(0,a) = \Psi^-$ el subespacio vectorial Ψ formado por los campos V tales que $V_{|_{[t_{j-1},t_j]}}$,$j = 1,...,k$ es un campo de Jacobi. Ψ^- tiene dimensión finita; Sea Ψ^+ el subespacio de Ψ constituido por los campos W tales que $W(t_1) = W(t_2) = \cdots = W(t_k) = 0$.

Proposición 7.3. *V es una suma directa $V = V^+ \bigoplus V^-$ y los subespacios V^+ y V^- son ortogonales en relación a I_a. Además I_a restricta a V^+ es positiva definida.*

Demostración. Dado $V \in \Psi$, sea W un campo en Ψ^- dado por $W(t_j) = V(t_j)$; como $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$ no tiene puntos conjugados, un tal W existe y es único. Así $V - W \in \Psi^+$ y por tanto $\Psi = \Psi^+ \bigoplus \Psi^-$. Además si $X \in \Psi^-$ y $Y \in \Psi^+$, se tiene que:

$$0 = I_a(X,Y) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle 0, \frac{DX}{dt}(t_j^+) - \frac{DY}{dt}(t_j^-) \right\rangle = 0$$

es decir que Ψ^+ y Ψ^- son ortogonales relativamente a I_a. Como $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$ con $j = 1,...,k$ son geodésicas, estas tienen energía menor que cualquier otro camino entre sus extremos. Luego si $V \in \Psi$, entonces $I_a(V,V) \geq 0$. Falta demostrar que $I_a(V,V) > 0$ si $V \in \Psi^+ - \{0\}$.

Por contradicción supongamos que $I_a(V,V) = 0$ con $\in \Psi^+$,$V = 0$. Afirmamos que esto implica que V pertenece al espacio nulo de I_a. En efecto si $W \in \Psi^-$, entonces $I_a(V,V) = 0$, debido a la ortogonalidad arriba mencionada. Si $W \in \Psi^+$, consideraremos la desigualdad

$$0 \leq I_a(V + cW, V + cW) = 2cI_a(V,W) + c^2 I_a(W,W)$$

Válida para todo real c. Esto quiere decir que existen reales $A \geq 0$ y B tales que $Ac^2 + 2Bc \geq 0$ para todo c real, lo cual es posible sólo cuando $B = 0$, i.e., $I_a(W,W) = 0$. Por tanto V pertenece al espacio nulo de I_a. Como el espacio nulo está constituido de espacios de Jacobi y V se anula en t_j, concluimos que V=0, lo cual es una contradicción. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema del Índice

Demostración. **[Demostración del Teorema del Indice]** Introducimos primero la siguiente notación. Si $t \in [0, a$, indicaremos por γ_t, a la restricción de γ al intervalo $[0,t]$; la forma del índice correspondiente será indicada por I_t, y el índice I_t se denotará por $i(t)$. De esta manera, definimos una función $i : [0,a] \longrightarrow N$, cuyo comportamiento queremos estudiar.

Recordando que la subdivisión de $[0,a]$ por puntos t_j $j = 0,..,k$ es fija y además $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$ es una geodésica minimizante, concluimos que $i(t)$ es cero en una vecindad de 0.
Afirmamos que $i(t)$ es no decreciente. En efecto, por definición de $i(t)$, existe un subespacio $\Omega \subset \Psi(0,t)$ tal que I, es negativa definida en Ω y dim$\Omega = i(t)$. Todo elemento $V \in \Omega$ se extiende a un elemento $V \in \Psi(0,t)$; definiendo $\overline{V} = 0$ en $[t,\overline{t}]$. Es claro que $I_t(V,V) = I_{\overline{t}}(\overline{V},\overline{V})$. Por definición de índice, $i(\overline{t}) \geq i(t)$.

Para obtener otras propiedades de $i(t)$, notemos que el índice de I_t es el índice de la restricción I_t al subespacio $\Psi^-(0,t)$.

Supongamos que $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Como cada elemento de $\Psi^-(0,t)$ es determinado por su valor en los puntos $\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{j-1})$, tenemos que $\Psi^-(0,t)$ es isomorfo a la suma directa:

$$\Psi^-(0,t) = T_{\gamma(t_1)} \bigoplus \cdots \bigoplus T_{\gamma(t_{j-1})} = S_j$$

Podemos por tanto considerar las formas cuadráticas I_t como una familia de formas cuadráticas en un espacio fijo S_j y además I_t depende continuamente de t.

Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $i(t-\varepsilon) = i(t)$. En cada punto conjugado a $\gamma(0)$, i deja de ser continua y da un salto igual a la multiplicidad del punto conjugado. Entonces podemos describir $i(t)$ como una función que es cero en una vecindad del origen y es continua a la izquierda y tiene discontinuidad de salto en los puntos conjugados a el salto, siendo precisamente igual a la multiplicidad del punto conjugado. $\square$