REVISTA BOLIVIANA DE MATEMÁTICA 3(2). AÑO 2005 pp. 7-9 UMSA

ARTÍCULO 2

El retículo de un ℓ-grupo

RAMIRO LAFUENTE R.[1]

2.1 Introducción.-

Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado $(G, \leqslant)$ donde para cada par de elementos $a, b \in G$ existen, en G, el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.
Se denotará $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.

Un ℓ-grupo es una terna $(G, \leqslant, \cdot)$ donde $(G, \leqslant)$ es un retículo y $(G, \cdot)$ es un grupo. Además se verifica la siguiente condición, para cualesquiera $a, b, c \in G$ se tiene que:

$$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c \text{ y } c \cdot a \leqslant c \cdot b$$

Se dice que un retículo $(G, \leqslant)$ es *distributivo* si para todo $a, b, c \in G$,

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

Es evidente que en un grupo totalmente ordenado, la distributividad se cumple. Esto es consecuencia del hecho que si $a \leqslant b$, entonces $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$.
Un grupo totalmente ordenado es un grupo ℓ-grupo $(G, \leqslant, \cdot)$ donde $(G, \leqslant)$ es totalmente ordenado.

2.2 Distributividad en Retículos.-

Sucede que no todos los retículos son distributivos. Supongamos que el retículo $(G, \leqslant)$ contiene un subretículo de alguna de las siguientes formas indicadas en la figura. Veamos que sucede cuando calculamos $b \wedge (c \vee d)$ y $(b \wedge c) \vee (b \wedge d)$

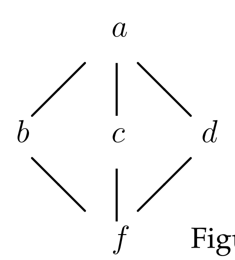

Figura $1a$

[1] ramirohlafuente@gmail.com Universidad Mayor de San Andrés

en $(1a)$:

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b$$
$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = f \vee f = f$$

Luego, $b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$, es decir, G no es distributivo.

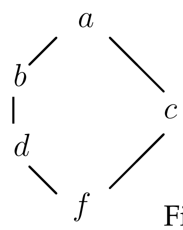

Figura $1b$

Similarmente, para $(1b)$ se tiene lo siguiente:

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b$$
$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = f \vee d = d$$

Lo cual también muestra que G no es retículo distributivo.

2.3 Distributividad en el retículo de un ℓ-grupo.-

SURGE, naturalmente, la siguiente pregunta:

¿Es distributivo el retículo de un ℓ-grupo?

El siguiente teorema nos da una respuesta positiva. En el desarrollo de la demostración se utilizan algunas propiedades de ℓ-grupos que son básicas y se pueden ver en cualquiera de las referencias bibliográficas [2], [3], [4] y [5].

Teorema 2.1. *El retículo de un ℓ-grupo es distributivo.*

Demostración. Sean g, h_1, h_2 elementos del ℓ-grupo $(G, \leqslant, \cdot)$.

Sea $x = h_1 \vee h_2$. Entonces, $e \leqslant xh_1^{-1}$ y $e \leqslant xh_2^{-1}$.
Además,

$$g \wedge x \leqslant xh_i^{-1} g \wedge x = (xh_i^{-1})(g \wedge h_i) \text{ para } i = 1, 2$$

Luego

$$e \leqslant (g \wedge x)(g \wedge h_i)^{-1} \leqslant xh_i^{-1} \text{ para } i = 1, 2$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned} e &= x(h_1 \vee h_2)^{-1} = x(h_1^{-1} \vee h_2^{-1}) \\ &= (xh_1^{-1} \vee xh_2^{-1}) \end{aligned}$$

Así tenemos que,

$$\begin{aligned} e &= (g \wedge x)(g \wedge h_1)^{-1} \wedge (g \wedge x)(g \wedge h_2)^{-1} \\ &= (g \wedge x)[(g \wedge h_1)^{-1} \wedge (g \wedge h_2)^{-1}] \\ &= (g \wedge x)[(g \wedge h_1) \vee (g \wedge h_2)]^{-1} \end{aligned}$$

es decir,

$$g \wedge x = (g \wedge h_1) \vee (g \wedge h_2)$$

por lo que

$$g \wedge (h_1 \vee h_2) = (g \wedge h_1) \vee (g \wedge h_2)$$

□

Podemos afirmar entonces algo muy interesante a propósito de lo que impone la estructura algebraica de grupo sobre la estructura geométrica de retículo, es decir, que la estructura de grupo dotada a un retículo, fuerza al retículo a ser distributivo.

Tenemos entonces dos resultados a partir de este hecho que se enuncian en los siguientes dos párrafos.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que si se tiene un retículo $(G, \leqslant)$ que no es distributivo, entonces será imposible dotar a $G, \leqslant)$ de una estructura de ℓ-grupo que mantenga la relación de orden.

Por lo tanto cualquier retículo que tenga un subretículo isomorfo a uno de los retículos de la Figura 1 no podrá soportar una estructura de ℓ-grupo que respete el orden de $(G, \leqslant)$.

Referencias Bibliográficas

[1] Garret Birkhoff, *Lattice Theory*.

[2] Darnell Michael, *Theory of Lattice-Ordered Groups*.

[3] M. Anderson y T. Feil *Theory of Lattice-Ordered Groups*.

[4] V.M. Kopytov y N. Medvedev *The Theory of Lattice-Ordered Groups*.

[5] A.M.W. Glass:*Partially Ordered Structures*.

[6] Ramiro Lafuente *Matemática Discreta I*