

ARTÍCULO 6

El Poliedro De Csaszar

MARCELO MACHICAO R.¹

6.1 El Poliedro.-

AL analizar la estructura del esqueleto de un singular sólido conocido como el poliedro de Csaszar, el matemático norteamericano, Donald W. Crowe, descubrió algunos notables isomorfismos entre ciertos esquemas combinatorios que aparentemente no tienen relación alguna:

- El mapa de 7 colores sobre la superficie del toro
- El más pequeño plano proyectivo finito
- Un bloque de ternas de Steiner
- El diseño de un torneo de Bridge entre 8 equipos
- Una matriz combinatoria conocida como “Matriz de Hadamard”

El poliedro que relaciona estos esquemas es bastante interesante por sí mismo. Es el único poliedro conocido, aparte del tetraedro, que no tiene diagonales.

En un poliedro, llamamos **diagonal** a un segmento que une cualesquiera dos vértices no conectados por una arista. Consideremos por ejemplo, los esqueletos del octaedro, un prismoide y el tetraedro: El octaedro tiene tres diagonales: \overline{AF} , \overline{EC} y \overline{BD} . Algunas diagonales del prismoide de base cuadrada son: \overline{US} , \overline{VY} , \overline{WX} . El tetraedro no tiene ninguna diagonal ya que cada par de vértices en él, ya está conectado por una arista.

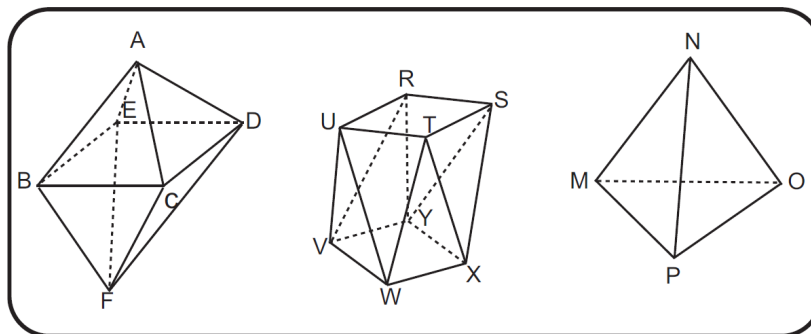


Figura 6.1: El esqueleto de tres poliedros

¹marcmaross@hotmail.com Universidad Mayor de San Andrés

Podemos representar los esqueletos de los poliedros mediante grafos en el plano, esto es, mediante conjuntos de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas). Estos grafos se obtienen fácilmente proyectando el esqueleto de los poliedros sobre el plano con una fuente de luz muy cercana a una cara del poliedro. Así los poliedros anteriores pueden representarse por grafos como en la Figura 6.2

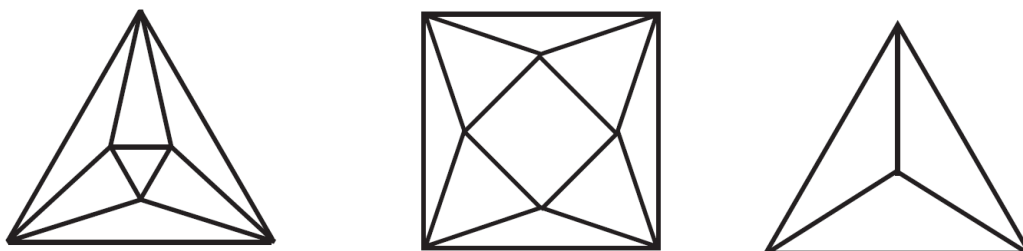


Figura 6.2: Grafos del octaedro, un prismoide y el tetraedro

Si en un conjunto de n puntos cada par de ellos está conectado por una arista, tal esquema se llama **grafo completo** de n puntos. El grafo del tetraedro es un grafo completo de 4 puntos. Cualquier poliedro que carece de diagonales debe tener, claramente, un esqueleto que es un grafo completo. Como ningún poliedro puede tener menos de 4 vértices, el grafo completo de 4 vértices es el más simple grafo que corresponde al esqueleto de un poliedro.

Procuremos ahora ser cuidadosos para dar con precisión algunas definiciones. Un **poliedro simple** es uno que es topológicamente equivalente a una esfera y cuyas caras son **polígonos simples**, polígonos topológicamente equivalentes a un disco. Intuitivamente, lo anterior significa que si el poliedro simple tuviera caras elásticas: entonces podría inflarse como un globo hasta adquirir la forma de una esfera.

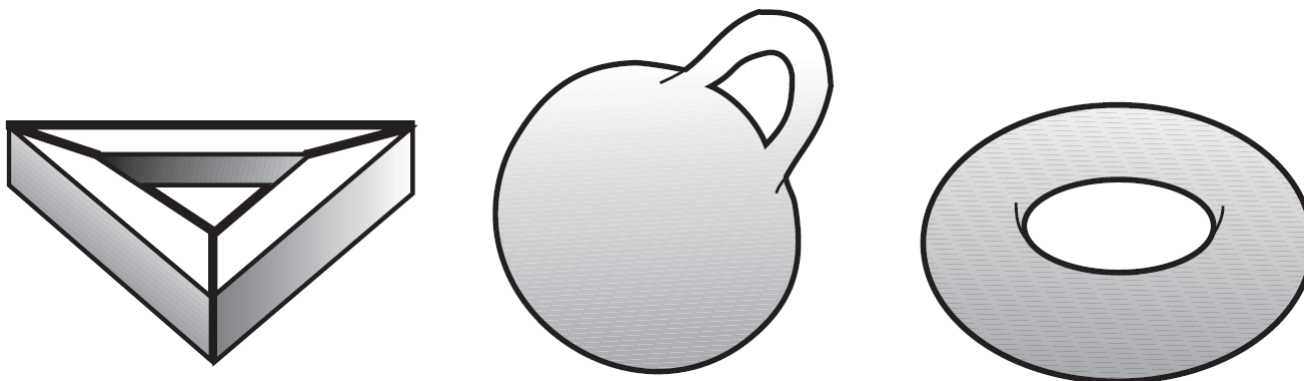


Figura 6.3: Un poliedro no simple

Esta definición excluye estructuras no simples como dos poliedros unidos por una arista o un vértice, poliedros estrellados con caras intersectantes y sólidos con túneles u orificios internos.

Los poliedros de la Figura 6.1 son simples; pero no es simple un poliedro como el de la figura adjunta; éste es topológicamente equivalente a un toro, o a una esfera con una asa.

El tetraedro es el único poliedro simple que carece de diagonales. Surge ahora una interesante cuestión. Definamos un **toroide** como un poliedro topológicamente equivalente a una esfera con una o más asas y cuyas caras sean todas polígonos simples. El poliedro de la figura adjunta es un ejemplo. Será posible construir un toroide que no tenga diagonales?

La respuesta a esta pregunta no se conocía antes de 1940, cuando un topólogo húngaro, Akos Csaszar, logró construir tal poliedro. Su esqueleto se representa en el plano mediante el grafo com-

pleto de 7 vértices que mostramos de un modo simétrico a la izquierda de la figura 6.4.

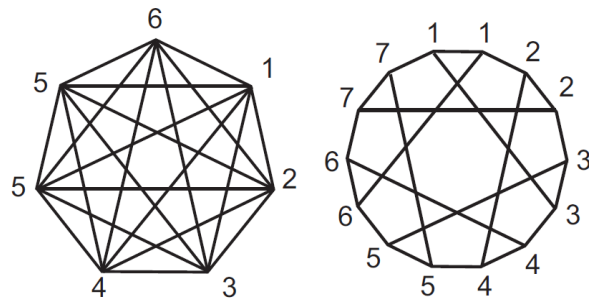


Figura 6.4: Grafos del poliedro de Csaszar y de su dual

El grafo es isomorfo al esqueleto de un simplexe 6-dimensional: el análogo al tetraedro en el espacio de 6 dimensiones. Dado que cada par de vértices está unido por una arista, el poliedro tiene 21 aristas y 14 caras triangulares.

No es difícil construir un modelo de papel del poliedro de Császár. Copie los dos patrones de la Figura 6.5 en papel de buena calidad o cartulina y recorte las copias. Coloree las siete regiones sombreadas por ambos lados. Doble luego el papel efectuando “doblecetes montaña” en las líneas punteadas y “doblecetes de valle” en las líneas sólidas.

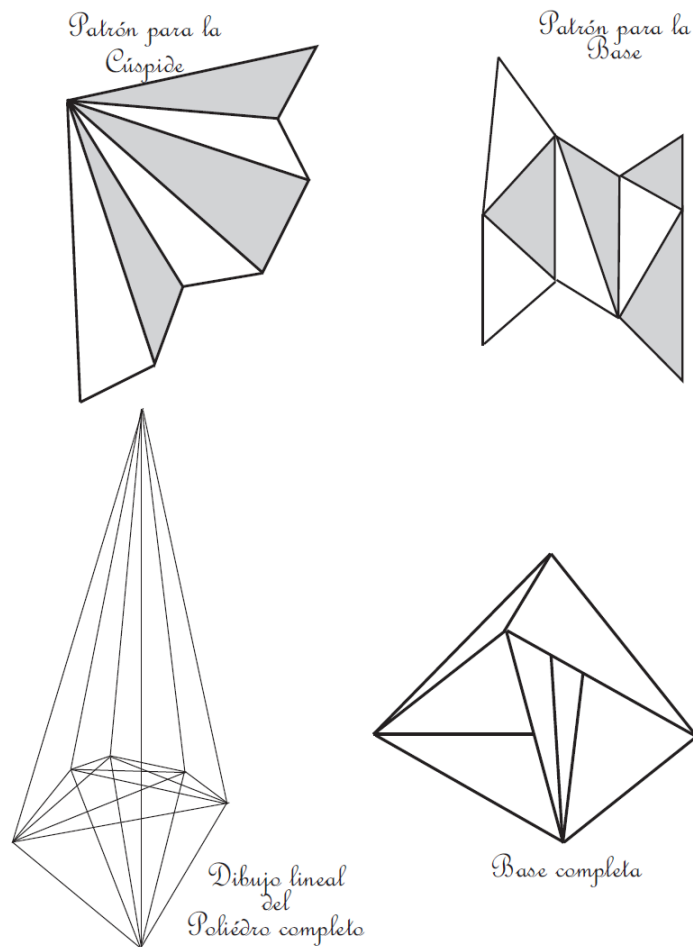


Figura 6.5: Patrones para construir un modelo del poliedro de Csaszar

1. En el patrón de la base, doble los dos triángulos mayores hacia el centro y pegue las aristas marcadas con A entre sí. De la vuelta al papel. Doble los dos triángulos pequeños hacia el centro: pegue las aristas marcadas con B entre sí para obtener la base completa.

2. La parte superior tiene 6 caras y se arma pegando las aristas marcadas con C entre sí. Coloque esta parte sobre la base como muestra el dibujo del modelo completo. Se podrá colocar sobre la base en dos formas. Elija aquel ajuste que une triángulos claros con triángulos sombreados. Pegue cada una de las 6 aristas a las aristas correspondientes de la base.

No se sabe si existe algún otro toroide sin diagonales. Aplicando análisis diofántico elemental (determinando soluciones enteras a ecuaciones) Donald Crowe demuestra que si hubiera algún otro toroide así, debería tener al menos 12 vértices y debería ser isomorfo a una esfera con 6 asas. Su prueba es como sigue:

Para poliedros simples hay una famosa fórmula, descubierta por Leonhard Euler, que relaciona el número de vértices (V), aristas (A) y caras (F) del poliedro. Es:

$$C + V - A = 2$$

la fórmula se demuestra fácilmente, y sólo se requiere un pequeño trabajo adicional para modificarla de tal modo que sea válida para el caso de toroides. Para un toroide topológicamente equivalente a una esfera con g asas, la fórmula es:

$$C + V - A = 2 - 2g \quad (1)$$

Si un toroide carece de diagonales, su esqueleto tiene una proyección en el plano que es un grafo completo; y para cualquier grafo completo, es sencillo ver, que el número de aristas A viene dado en función del número de vértices por:

$$A = \frac{V(V-1)}{2} \quad (2)$$

Por otra parte, en un toroide sin diagonales, todas las caras tienen que ser triangulares (si no fuera así alguna cara tendría una diagonal contenida en ella).En consecuencia, si contamos las aristas en cada cara obtendremos el número $3C$. Ahora, como cada arista pertenece a exactamente dos caras, al hacer este conteo, cada arista se está contando dos veces; entonces $3C = 2A$; de donde

$$C = \frac{2}{3}A \quad (3)$$

reemplazando (2) en (3) obtenemos el número de caras en función del número de vértices:

$$C = \frac{V(V-1)}{3} \quad (4)$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1), y simplificando:

$$V^2 - 7V + 12 = 12g$$

y factorizando el lado izquierdo, obtenemos que el valor de g en función de V debe ser:

$$g = \frac{(V-3)(V-4)}{12}$$

Ahora bien, los valores de V y g deben ser enteros y sabemos además que $V \geq 3$. Si $V = 4$, g tiene el valor 0. Estos valores concuerdan con los del tetraedro. Si $V = 5$ ó 6 la expresión anterior nos da un valor no entero para g , probando así que no puede haber un toroide sin diagonales que tenga 5

Figura 6.6: El mapa de siete colores sobre el toro

o 6 vértices. Cuando V es 7, g es 1. Estos valores corresponden al poliedro de Csaszar. La siguiente solución en enteros es $V = 12, g = 6$. No se conoce aún si existen un toroide sin diagonales con estos valores. Tampoco se sabe si existe un toroide así para las siguientes dos soluciones: $V = 15, g = 11$ y $V = 16, g = 17$. A partir de aquí, como señala Crowe, el número de asas excede al número de vértices de modo que podemos descartar casi con total certeza todos los toroides restantes.

El poliedro de Csaszar es topológicamente equivalente a una esfera con una asa, o a un toro; esto significa que si tuviera una superficie hecha de un material elástico, podríamos inflarlo hasta darle la forma de un neumático. Sus 21 aristas formarían entonces un grafo completo de 7 vértices sobre la superficie del toro y ninguna de ellas intersectaría a ninguna otra.

En el plano, o en la superficie de una esfera², se puede trazar un grafo completo de 4 vértices sin que sus aristas se crucen (vea el grafo del tetraedro) pero es imposible (en el plano o la esfera) trazar un grafo completo de 5 o más vértices sin que sus aristas se crucen. Sin embargo, en la superficie del toro la situación es distinta. Como ya indicamos, en tal superficie podemos trazar un grafo completo de 7 vértices sin que sus aristas se crucen; tal grafo es justamente el correspondiente al esqueleto del poliedro de Csaszar.

Supongamos ahora que sobre el toro cambiamos tal grafo completo a su dual. Esto se hace tomando un punto dentro de cada una de las 14 caras triangulares y luego uniendo con un segmento cada punto con cada uno de los 3 puntos que pertenecen a las caras vecinas. Como cada nueva arista cruza una arista antigua, el número de aristas nuevas permanece en 21. El número de caras y el número de vértices, sin embargo, se intercambian. El nuevo grafo se muestra en su proyección plana y simétrica a la derecha de la figura 4. Crowe representa los 14 vértices mediante puntos oscuros y claros alternados y los numera como se muestra, por razones que en breve se harán claras. Las "caras" son difíciles de visualizar en este diagrama, pero se puede percibir que las aristas delimitan 7 regiones, cada una rodeada por 6 aristas.

6.2 El mapa de 7 colores en el toro

EL dual al grafo del poliedro de Csaszar, también se dibuja sobre el toro sin que sus aristas se intersecten. Cuando se hace esto, el resultado es un familiar mapa toroidal de 7 colores (ver figura 6). Lo notable de este mapa es que cada par de regiones en él tiene una frontera común. Esto significa que si decidimos colorear el mapa de modo que ningún par de regiones contiguas tenga el mismo color, necesitaremos 7 colores. Sobre el plano o sobre la esfera, no es posible trazar más de 4 regiones donde cada par tenga frontera común. Sobre el toro, 7 es el máximo número de regiones que pueden trazarse, cumpliendo la antedicha condición.

6.3 Bloque de ternas de Steiner

VEAMOS ahora de que modo Crowe empleó el grafo dual del grafo correspondiente al poliedro de Csaszar, para resolver un antiguo problema recreativo: *Siete niñas viven en una casa en las afueras de un pueblo. Cada día tres niñas dejan la casa para ir de visita al pueblo. Cómo pueden elegirse las ternas de niñas de tal manera que al cabo de 7 días cada par de niñas haya estado en exactamente una de las 7 ternas?*

El grafo dual (figura 4 derecha) nos provee de dos soluciones. Para obtener una de tales soluciones procedemos como sigue: para cada punto negro escribimos la tripleta (no ordenada) de números de los tres vértices blancos adyacentes (conectados por una arista) a él. Para obtener la otra solución,

² Mencionamos ambas superficies, porque si le quitamos un punto a la esfera, ésta resulta ser topológicamente equivalente al plano

escribimos todas las tripletas de números de los puntos negros adyacentes a cada punto blanco. Los dos bloques de tripletas resultantes son:

1	2	4	1	2	6
2	3	5	2	3	7
3	4	6	3	4	1
4	5	7	4	5	2
5	6	1	5	6	3
6	7	2	6	7	4
7	1	3	7	1	5

Cada uno de estos bloques se llama un **sistema de tripletas de Steiner** de orden 7 o “plano proyectivo finito” de orden 2. Los sistemas de Steiner y los planos proyectivos son tópicos de gran importancia en la moderna teoría combinatoria. Aquí sólo podemos mencionarlos de pasada.

Dado que el grafo correspondiente al mapa de 7 colores es el dual del esqueleto del poliedro de Csaszar, con cada uno de sus 14 vértices en correspondencia con cada una de las 14 caras del modelo del poliedro de Csaszar (puntos negros con caras blancas y puntos blancos con caras sombreadas) podemos también extraer fácilmente ambas soluciones del modelo. En el modelo, ninguna cara comparte una arista común con otra cara del mismo color. Si las caras se numeran en correspondencia con los números de los vértices del grafo dual, las tripletas de números sobre las tres caras blancas adyacentes a cada cara sombreada, darán una de las soluciones, y las tripletas de números sobre las tres caras sombreadas adyacentes a cada cara blanca, darán la otra solución.

Un otro modo de obtener los mismos dos conjuntos de tripletas del modelo es numerar sus vértices de cualquier manera, del 1 al 7. Los números en los tres vértices de cada cara sombreada dan entonces un bloque de 7 tripletas y los números en los 3 vértices de cada cara blanca, nos dan un otro bloque. Las dos soluciones serán equivalentes a los dos bloques de tripletas listados anteriormente. Aunque los números pueden no coincidir, los números no son otra cosa que símbolos arbitrarios sobre un grafo simétrico. Para ver la equivalencia, puede ser necesario permutarlos de algún modo, como por ejemplo cambiando todos los 1's por 5's, todos los 5's por 3's y así.

Las dos soluciones obtenidas por cualquiera de estos métodos, son también idénticas, en el sentido de que una de ellas puede transformarse en la otra permutando sus elementos; en otras palabras, hay una sola solución básica.

Los dos bloques de tripletas que obtuvimos están relacionados de un modo curioso. Ninguna tripleta aparece en ambos bloques y si dos pares de niñas en un bloque aparecen con una misma niña (por ejemplo, en el primer bloque 1,2 y 3,6 que aparecen ambos con el 4) el mismo par aparece con diferentes niñas (5, 6) en el segundo bloque. Cuando estas dos propiedades se cumplen, los bloques se llaman ortogonales.

6.4 Diseño de un torneo con 8 equipos

UN sistema de tripletas de Steiner de orden n es posible sólo cuando $n \equiv 1 \pmod{6}$ ó $n \equiv 3 \pmod{6}$. Cada par de bloques ortogonales de tales sistemas de orden n , según explica Crowe, nos brindan una solución para el siguiente problema de diseño de un torneo de bridge con $n + 1$ equipos. Supongamos hay 8 equipos de jugadores de cartas y 7 mesas de juego. Cada equipo debe jugar exactamente una vez con cada uno de los otros equipos y también exactamente una vez en cada mesa.

Para diseñar el torneo, indica Crowe, primero dibuje una matriz cuadrada de 7×7 celdas. Considere el par 1,2 en el primer bloque de tripletas; está asociado con el 4 y en el segundo bloque con el 6.

Así, colocamos 1,2 en la celda de intersección de la cuarta columna y la sexta fila (ver la tabla). Consideremos otro par: 1,3. Aparece con el 7 en el primer bloque y con el 4 en el segundo; luego 1,3 debe ir en la séptima columna y cuarta fila. Se sigue este procedimiento para todos los pares de números. La etapa final consiste en combinar el 8 con 1,2,3,4,5,6 y 7 y colocar estos pares en la diagonal que va de la primera celda en la primera fila hasta la última celda en la última fila. Cada columna nos indica una mesa y cada fila nos indica un grupo de 4 partidas simultáneas en 4 de las 7 mesas. Este esquema combinatorio cumple todas las condiciones planteadas del torneo.

1,8			5,7		3,4	2,6
3,7	2,8			6,1		4,5
5,6	4,1	3,8			7,2	
	6,7	5,2	4,8			1,3
2,4		7,1	6,3	5,8		
	3,5		1,2	7,4	6,8	
		4,6		2,3	1,5	7,8

La matriz se conoce como “ *cuadrado de Room de orden 8* ”. Tal disposición es un arreglo de un número par de objetos, $n + 1$, en una matriz cuadrada de lado n . Cada celda está o bien vacía o contiene exactamente 2 objetos distintos; además, cada objeto aparece exactamente una vez en cada fila y columna, y cada par (no ordenado) de objetos ocurre en exactamente una celda.

El menor cuadrado de Room es trivial. Es de orden 2 y consiste en una celda que contiene al par 1,2. No es posible construir cuadrados de Room para 4 o 6 objetos. Así, el cuadrado de orden 8 visto antes es el menor cuadrado de Room no trivial.

El nombre “*Cuadrado de Room*” es debido al matemático Thomas G. Room quien definió estos cuadrados en una breve nota en 1955. Los expertos en combinatoria los han investigado desde entonces. Posteriormente se descubrió que los cuadrados de Room se habían estado usando desde 1900 en torneos de bridge, pero al parecer los matemáticos no se interesaron en ellos hasta después de publicada la nota de Room.

6.5 Matrices de Hadamard

HAY aún más!... El Geómetra H.S.M. Coxeter indicó de que manera el sistema de tripletas de Steiner de orden 7 puede usarse para construir una notable matriz combinatoria de orden 8. Consideremos un tablero ajedrezado de orden 8. Si recortamos dos cualesquiera de sus filas y las colocamos una junto a otra, entonces o bien cada celda en una fila coincidirá en color con su celda vecina de la otra fila o bien cada celda no coincidirá en color con su celda vecina.

Deseamos colorear las 64 casillas del tablero de 8x8 con 2 colores de tal modo que se cumpla la siguiente propiedad: Si cualesquiera dos filas se colocan juntas la mitad de los pares de celdas coincidan en color y la otra mitad no coincidan y que lo mismo ocurra para cualquier par de columnas. Tales matrices se conocen como matrices de Hadamard, debido al matemático francés Jacques Hadamard, quien las estudió en 1890. Aparte del caso trivial de orden 2, no es posible construir una matriz de Hadamard a menos que el orden sea un múltiplo de 4. No se sabe si hay matrices así para cada uno de tales órdenes.

La matriz de abajo nos muestra de qué manera nuestro primer bloque de tripletas de Steiner nos permite construir una matriz de Hadamard de 8x8.

El problema involucra a 8 niñas y 8 días. Numeramos las filas y columnas como se muestra. La octava niña es algo mayor que las demás y sale con cada terna de niñas todos los días. El octavo día las ocho chicas van al pueblo. Para cada día (indicado por una fila) se colorea las celdas que indican

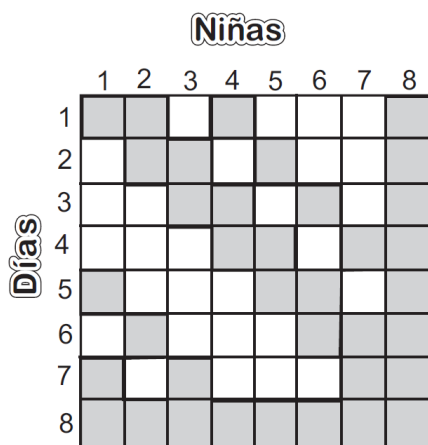


Figura 6.7: Patrones para construir un modelo del poliedro de Csaszar

los números de las niñas (más el número 8 que corresponde a la mayor). El resultado es una matriz de Hadamard!

Las matrices de Hadamard son algo más que curiosidades recreativas. Se ha usado estas matrices para la construcción de códigos binarios de corrección de errores. Cuando la sonda Mariner del año 1969 envió gráficas de la superficie de Marte, esos gráficos fueron enviados empleando un código de corrección de errores basado en una matriz de Hadamard de orden 8 . Las matrices de Hadamard se han empleado también en forma amplia en el procesamiento de información gráfica, produciendo una especie de hologramas matemáticos de las imágenes originales.³

³ El presente artículo es una traducción libre, con añadidos, cambios y supresiones menores, del artículo publicado originalmente en inglés en la revista Scientific American por Martin Gardner.