ARTÍCULO 1

La integral de Henstock y el Teorema Fundamental de Cálculo

RAMIRO CHOQUE C.[1]

Resúmen

El presente artículo contiene la definición de la integral general de Riemann, también conocido como la integral de Henstock sobre el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Se demuestra el Teorema Fundamental de Cálculo sobre un intervalo cerrado de la recta real y finalmente se dan algunos ejemplos de aplicación.

SEA $A \subset \mathbb{R}^n$ un bloque cerrado y sea P una partición de A. Para cada bloque de partición $B \in P$ escogemos un punto $x_B \in B$, con ello obtenemos el conjunto finito

$$\xi = (x_B)_{B \in P}$$

El par $P^* = (P, \xi)$ es llamado partición puntuada del bloque A, y x_B es la marca del bloque de partición $B \in P$. Para una función $f : A \to X$ definida en el bloque cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ con valores en el espacio normado X, la suma de Riemann se define por

$$\sum(f, P) = \sum_{B \in P} f(x_B) \cdot \text{Vol.}B$$

Definición 1.1. La función f es integrable si existe un vector $v \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un función no negativa $\delta : A \to \mathbb{R}^+$ para el cual, si P^* es una partición puntuada de A,

$$B \in P \text{ y vol}(B) < \delta(x_B) \Rightarrow \left| \sum(f, P^*) - v \right| < \varepsilon$$

El vector v es llamado integral de f sobre A, denotado por $\int_A f$.

Observación 1.1. Dado $\delta : A \to \mathbb{R}^+$ existe una partición puntuada P^* tal que $\forall B \in P$ se tiene vol.$(B) <$ $\delta(x_B)$.

La prueba se encuentra en [1] y [2] de 1. Esto es necesario para verificar la unicidad de la integral.

Cuando δ es una función constante obtenemos la integral usual de Riemann. Si en la partición puntuada $P^* = (P, \xi)$ escogemos las marcas de tal forma que $x_B \in A$ (y no necesariamente $x_B \in B$) obtendremos un partición puntuada libre. Con ello la definición 1.1 es la integral de Lebesgue.

[1]rchoquec@gmail.com, Universidad Mayor de San Andrés

Ejemplo 1.1. Sea $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea $E = ([0,1] \bigcap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \bigcap \mathbb{Q})$. Demostrar que la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

es integrable y que $\int_A f = 0$.

Demostración. Como E es numerable, podemos escribir $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Sea $\varepsilon > 0$; como podemos seleccionar las marcas dependiendo de puntos de A, escogemos de tal forma de obtener una serie convergente.
Sea $\delta : A \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2^i} & \text{si} \quad x = a_i \\ 1 & \text{si} \quad x \neq a_i \end{cases}$$

Sea P^* una partición puntuada de A tal que $B \in P$ y vol.$(B) < \delta(x_B)$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum (f, P) - 0 \right| &= \sum_{B \in P} f(x_B) \cdot \text{vol}(B) = \sum_{x_B \in E} \text{vol}(B) \\ &< \sum_{x_B \in E} \delta(x_B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así f es integrable sobre A y $\int_A f = 0$. □

Este es un ejemplo de una función Henstock integrable que no es Riemann integrable.

En lo que sigue nuestro objetivo es verificar el Teorema Fundamental de Cálculo (**TFC**) sobre un intervalo cerrado de la recta real.

Supongamos que $f : [a,b] \to X$ es diferenciable en el punto $z \in [a,b]$. Entonces si elegimos $u \leq z \leq v$, para u y v próximo a z, entonces la pendiente de la recta determinada por los puntos $(u, f(u))$ y $(v, f(v))$ está cerca de la pendiente de la recta tangente en z, como se puede observar geométricamente, esto es

$$\left| \frac{f(v) - f(u)}{v - u} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

para $z \in [u,v] \subset]z - \delta, z + \delta[\bigcap [a,b]$.

Lema 1.1. *Si* $f : [a,b] \to X$ *es diferenciable en el punto* $z \in [a,b]$*, entonces existe un* $\delta = \delta(z, \varepsilon) > 0$ *tal que,*

$$z \in [u,v] \subset]z - \delta, z + \delta[\bigcap [a,b] \Rightarrow \left| f(v) - f(u) - f'(z)\,(v - u) \right| \leq \varepsilon\,(v - u) \tag{*}$$

Demostración. Como f es diferenciable en $z \in [a,b]$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in]z - \delta, z + \delta[\bigcap [a,b] \Rightarrow \left| f(x) - f(z) - f'(z)\,(x - z) \right| \leq \varepsilon \left| x - z \right|$$

Sea $z \in [u,v] \subset]z - \delta, z + \delta[\bigcap [a,b]$, entonces $u \leq z \leq v$ y

$$\begin{aligned} \left| f(u) - f(z) - f'(z)\,(u - z) \right| &\leq \varepsilon\,(z - u)\,, \\ \left| f(v) - f(z) - f'(z)\,(v - z) \right| &\leq \varepsilon\,(v - z)\,. \end{aligned}$$

Luego, sumado y restando, y por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
& \left|f(v)-f(u)-f'(z)\,(v-u)\right| \\
= & \left|f(v)-f(z)-f'(z)\,(v-z)-\left[f(u)-f(z)-f'(z)\,(u-z)\right]\right| \\
\leq & \left|f(v)-f(z)-f'(z)\,(v-z)\right|+\left|f(u)-f(z)-f'(z)\,(u-z)\right| \\
\leq & \ \varepsilon\,(z-u)+\varepsilon\,(v-z) \\
= & \ \varepsilon(v-u).
\end{aligned}$$

□

El **TFC** que se enuncia a continuación se caracteriza por la simplicidad de su enunciado, con relación a los TFC de la integral de Riemann y Lebesgue, ver [3] y [4] de 1

Teorema 1.2. *Si $f:[a,b]\to X$ es diferenciable, entonces $f':[a,b]\to X$ es integrable y*

$$\int_a^b f' = f(b)-f(a)$$

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Por el lema anterior, para cada $z\in[a,b]$ existe un $\delta(z,\varepsilon)>0$, para el cual se verifica (*). Esto define una función no negativa $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Sea $P^*=(P,\xi)$ una partición puntuada tal que $\ell(I_i)<\delta(\xi_i)$ para $I_i\in P$. Entonces

$$\xi_i\in I_i\subset]\xi_i-\delta,\xi_i+\delta[\ \bigcap\ [a,b]$$

luego de (*), con $I_i=[x_{i-1},x_i]$,

$$\left|f(x_i)-f(x_{i-1})-f'(\xi_i)\ell(I_i)\right|\leq\varepsilon\ell(I_i).$$

Por suma telescópica $f(b)-f(a)=\sum\limits_{I_i\in P}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|f(b)-f(a)-\sum(f',P^*)\right| &\leq \sum_{I_i}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})-f'(\xi_i)\ell(I_i)\right| \\
&\leq \varepsilon\sum_{I_i}\ell(I_i) \\
&= \varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

Luego f' es integrable y $\int_a^b f'=f(b)-f(a)$ □

Un generalización del teorema anterior es el siguiente.

Teorema 1.3. *Sea $f:[a,b]\to X$ continua que tiene derivada f' excepto en un numero numerable de puntos de $[a,b]$, y definimos $f'(x)=0$ en esos puntos, entonces $f':[a,b]\to X$ es integrable y $\int_a^b f'=f(b)-f(a)$.*

Demostración. Sea $E=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ los puntos donde f no es diferenciable.
Para cada $z\in[a,b]$ hay dos posibilidades:

- Si $z\in[a,b]-E$, entonces por el lema 1.1, existe $\delta_1(z,\varepsilon)>0$ que verifica (*)
- Si $z\in E$, entonces $z=a_n$, por continuidad de f existe $\delta_2(a_n,\varepsilon)>0$ tal que

$$u,v\in]a_n-\delta_2,a_n+\delta_2[\ \bigcap\ [a,b]\Rightarrow|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (**)$$

Esto no proporciona la función $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\delta(z) = \begin{cases} \delta_1(z) & \text{si} \quad z \in [a,b] - E \\ \delta_2(z) & \text{si} \quad z \in E \end{cases}$$

Sea $P^* = (P, \xi)$ una partición de $[a,b]$ tal que $\ell(I_i) < \delta(\xi_i)$ para $I_i \in P$. Entonces para la marca $\xi_i \in I_i \subset]\xi_i - \delta, \xi_i + \delta[\bigcap [a,b]$ ocurre dos posibilidades:

- Si $\xi_i \in [a,b] - E$, entonces de (*)

$$\left| f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(\xi_i)\ell(I_i) \right| \leq \varepsilon \ell(I_i).$$

- Si $\xi_i \in E$, entonces $\xi_i = a_{n_i}$, de (**)

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2^{n_i}}$$

Como $f'(a_{n_i}) = 0$, tendremos

$$\left| f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(\xi_i)\ell(I_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2^{n_i}}$$

Por sumas telescópica

$$f(b) - f(a) = \sum_{\xi_i \in E} (f(x_i) - f(x_{i-1})) + \sum_{\xi_i \notin E} (f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \left| f(b) - f(a) - \sum (f', P^*) \right| \\
\leq \; & \sum_{\xi_i \in E} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(\xi_i)\ell(I_i) \right| + \sum_{\xi_i \notin E} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(\xi_i)\ell(I_i) \right| \\
\leq \; & \sum_{\xi_i \in E} \frac{\varepsilon}{2^{n_i}} + \sum_{\xi_i \notin E} \varepsilon \ell(I_i) \\
< \; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon \sum_{I_i} \ell(I_i) \\
= \; & \varepsilon (1 + b - a).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2.

1. $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Sea $f(x) = 2\sqrt{x}$ es continua sobre $[0,a]$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ excepto en cero, definimos $f'(0) = 0$. Por el teorema anterior,f' es integrable y

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^a f' = f(a) - f(0) = 2\sqrt{a}.$$

2. $\int_0^a \ln x dx$. Sea $f(x) = \begin{cases} x\ln x - x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. Es una función continua, pues por regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} (x\ln x - x) \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x - 1}{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0+} (-x) \\ &= 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Además $f'(x) = \ln x$ salvo en cero, donde definimos $f'(0) = 0$.

Entonces por **TFC**, $\ln x$ es integrable sobre $[0, a]$ y

$$\int_0^a \ln x dx = f(a) - f(0) = a\ln a - a$$

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Sea $f(x) = \arcsin x$ con $x \in [-1, 1]$ es continua y $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \in]-1, 1[$. Definamos $f'(1) = f'(-1) = 0$. Por el **TFC** entonces f' es integrable y

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 f' = f(1) - f(-1) \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi \end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$. La función continua correspondiente debería ser de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ c & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Pero $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, luego no es posible hacer que sea continua. Luego es posible que no sea integrable. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$ con $f'(0) = 0$ es integrable sobre $[0, 1]$, entonces existe un numero L tal que, para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición puntuada P^*

$$\ell(I_i) < \delta(\xi_i) \Rightarrow \sum (f, P) < \varepsilon + |L| \, .$$

Sea $x_i = \frac{i}{n}$ con $i = 0, \ldots, n$, $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{2i-1}{2n}$. Con ello obtenemos una partición puntuada P^*. Para valores grandes de n ocurre $\ell(I_i) = \frac{1}{n} < \delta(\xi_i)$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \frac{2n}{2i-1} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon + |L|$$

entonces la serie $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1}$ tendría que ser convergente, un absurdo.

Referencias Bibliográficas

[1] Russell A. Gordon,*The Integral of Lebesgue*, Denjoy, Perron, and Henstock American Mathematical Society, 1994

[2] Robert G. Bartle, *Introduction to Real Analysis*, third edition.

[3] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third edition, 1976.

[4] Apostol T. M. *Mathematical Analysis*, Secund Edition, 1974.