ARTÍCULO 3

Formas Espaciales Geometría No-Euclidiana

LUIS TORDOYA LAZO[1]

Resúmen

En el presente artículo, se caracteriza a las variedades Riemannianas completas con curvatura seccional constante que son llamadas formas espaciales*. Los espacios de curvatura seccional constante fueron importantes en el desarrollo histórico de la Geometría Riemanniana, por sus relaciones con la Geometría no-euclidiana cuyos espacios son encontrados entre las formas espaciales. Los casos particulares S^n (esfera), P^n (plano proyectivo) y H^n (plano hiperbólico) son llamados geometría* ***esférica, elíptica e hiperbólica respectivamente.***

3.1 Introducción

EN la historia existen evidencias de que la teoría de las paralelas causó un trastorno considerable a los antiguos griegos. Euclides salvo la dificultad definiendo las paralelas como rectas coplanares que no se cortan por más que se prolonguen en uno u otro sentido, y adoptando como una suposición básica su famoso quinto postulado, o sea de las paralelas:

> *Si una recta que cae sobre dos rectas forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos.*

De los muchos sustitutos para el quinto postulado de Euclides, quizá el más popular es el que hizo el físico matemático escocés John Playfair $(1748 - 1819)$.

Por un punto dado no situado sobre una rectas sólo puede trazarse otra paralela a ella.

Considerando que un postulado se supone que es una proposición primitiva que se siente **es aceptable como inmediatamente verdadera** con base en las propiedades sugeridas en las explicaciones iniciales. Debe confesarse que el quinto postulado difícilmente satisface este requisito.

Lobachewsky en un bosquejo general de la geometría redactó en 1823, sobre el postulado de las paralelas simplemente que "*no se ha descubierto hasta ahora ninguna demostración rigurosa de su verdad*".

Posteriormente Lobachewsky publicó en el Kazan Messenger correspondiente al año 1829 un artículo titulado "*Sobre los principios de la Geometría*", que marca el nacimiento oficial de la geometría no-euclidiana. En este artículo Lobachewsky se convirtió en el primer matemático que cubrió la revolucionaria etapa de hacer pública una geometría construida expresamente sobre una hipótesis que

[1]tordoyalazo@hotmail.com, Universidad Mayor de San Andrés

contradecía frontalmente el postulado euclídeo del paralelismo: Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC y que no corta a la recta AB.

Riemann $(1826 - 1866)$ integró a la geometría no-euclidiana al contexto matemático, cuya tesis doctoral conducía también al concepto de superficie de Riemann, anticipado así en cierto modo la parte que la topología estaba destinada a jugar en el análisis.

Así, las geometrías de Riemann eran no-euclidianas en un sentido mucho más general que el caso de Lobachewsky, donde la cuestión esencial era simplemente la de cuantas paralelas se podían trazar por un punto o una recta. Riemann consideraba que la geometría no debería tratar ni siquiera necesariamente de puntos o rectas o del espacio en el ambiente usual, sino de conjuntos de n–uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo con ciertas leyes.

Hoy utilizamos el nombre de "*geometría Riemanniana*" también en un sentido más restringido: el de geometría plana que se obtiene de la **hipótesis del ángulo obtuso** de Saccheri, si abandonamos además la infinidad de las rectas. Se puede construir un modelo de esta geometría interpretando el "planoçomo la superficie de una esfera S^n, cuya curvatura seccional K es constante e igual a 1, y una "línea recta" como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera, es decir círculos máximos parametrizados proporcionalmente a la longitud de arco (geodésicas de S^n). En este caso la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos ángulos rectos, mientras que en la geometría de Lobachewsky y Bolyai (que corresponde a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri) la suma de los ángulos es siempre menor que dos rectos. El modelo geométrico de Lobachewsky se trata de la superficie engendrada al girar una tractriz alrededor de su asíntota, superficie conocida como "*Pseudoesfera*" debido a que tiene curvatura seccional K constante e igual a -1.

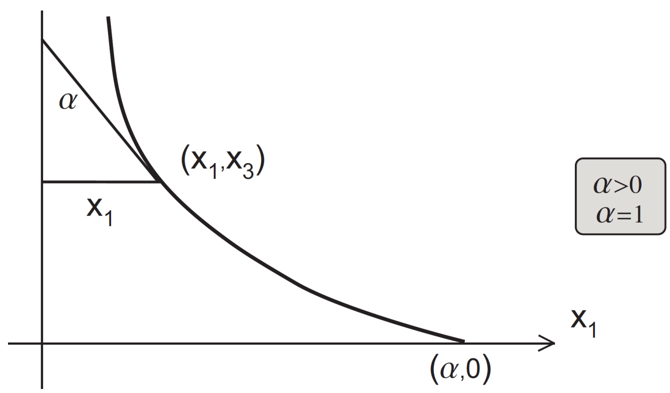

Figura 3.1: Tractriz al rededor de si asíntota

Esta geometría se generaliza en el plano hiperbólico $H^n = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0$, con la métrica

$$g_{ij}(x1, ..., x_n) = \delta_{ij}/x_n^2.$$

Dado que el plano $\mathbb{R}^n$ es una superficie de curvatura seccional K constante e igual a cero, puede considerarse la geometría euclídea como un caso intermedio entre los dos tipos de geometría no-euclidiana, la hiperbólica y la elíptica.

Es posible la caracterización de las anteriores geometrías en el contexto de las variedades Riemannianas completas y de curvatura seccional constante K (llamadas también formas espaciales). Para tal efecto se requiere que una variedad Riemanniana debe cumplir algunas hipótesis centrales tales como: completa, simplemente conexa, (propiedades globales) y de curvatura constante que es una propiedad local. Además de una teoría relacionada con espacios recubridores regulares y espacios cocientes. Concluyendo que una geometría no–euclidiana es una variedad Riemanniana completa

M junto con un grupo transitivo de isometrías G (movimientos no–euclidianos) que satisfacen el Axioma de Movilidad libre: Sean p, $\tilde{p} \in M$, γ_1, γ_2 segmentos geodésicos de M que comienzan en p y forman un ángulo α en p y $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}$ segmentos geodésicos con origen en $\tilde{p}$ y formando un ángulo α en $\tilde{p}$. Entonces existe $g \in G$, con $g(p) = \tilde{p}$, $g(\gamma_1) = \tilde{\gamma_1}$, $g(\gamma_2) = \tilde{\gamma_2}$. Esto corresponde a la "*igualdad de triángulos*" en la geometría euclidiana, e implica evidentemente de que M tiene curvatura seccional constante.

Finalmente, los espacios de la geometría no-euclidiana son encontrados en las formas espaciales. Los casos S^n , P^n (plano proyectivo) y H^n son llamados geometría **esférica, elíptica e hiperbólica** respectivamente.

El objetivo central del presente trabajo es la caracterización de las variedades Riemannianas completas y de curvatura seccional constante K, llamadas **formas espaciales**. Para tal efecto, consideremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea M^n una variedad Riemanniana completa y de curvatura seccional constante K. Entonces el recubrimiento universal $\tilde{M}$ de M. con la métrica del recubrimiento, es isométrico a:*

1. *H^n, si $k = -1$*
2. *$\mathbb{R}^n$, si $k = 0$*
3. *S^n, si $k = 1$*

donde H^n es el espacio hiperbólico $H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\}$con la métrica definida del siguiente modo.

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow H^n$ un sistema de coordenadas en torno de p, con $(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in X(u)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dX_q(0, ..., 1, ..., 0)$, entonces $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ es la métrica en H^n.

Se puede demostrar que: las rectas perpendiculares al hiperplano $x_n = 0$ y los círculos de H^n cuyos planos son perpendiculares al hiperplano $x_n = 0$ y cuyos centros están en este hiperplano son las geodésicas en H^n.

Para $n = 2$ se tiene el plano de Lobatchevsky que corresponde a la geometría no-euclidiana con la hipótesis del ángulo de Saccheri, y en la que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

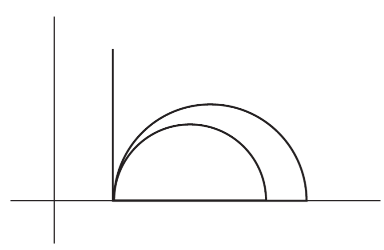

Figura 3.2: Geometría del plano de Lobatchewsky

La proposición anterior permite reducir la determinación de todas las formas espaciales a un problema de la teoría de grupos que se encuentra en el contexto de la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea M una variedad Riemanniana completa con curvatura seccional constante k $(1, 0, -1)$. Entonces M es isométrica a $\tilde{M}/\Gamma$, donde $\tilde{M}$es S^n (si $k = 1$),$\mathbb{R}^n$(si $k = 0$)o H^n (si $k = -1$), Gamma es un subgrupo del grupo de isometrías de $\tilde{M}$ que opera de modo totalmente discontinua en $\tilde{M}$, y la métrica de $\tilde{M}/\Gamma$ es la inducida por el recubrimiento $\pi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma$*

Nota 1: La proposición anterior implica el problema de determinar todos los subgrupos que operan de modo totalmente discontinuo del grupo de isometrías de cada uno de los modelos simplemente conexos $(S^n, H^n, \mathbb{R}^n)$.

Nota 2: En el desarrollo de los anteriores proposiciones se omitirán algunos aspectos teóricos, para su consulta se deja la bibliografía correspondiente.

3.2 Algunas definiciones y propiedades

Definición 3.1. Un espacio X se dice que es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial (Un elemento) para algún $x_0 \in X$ y, por tanto, para todo $x_0 \in X$. Con frecuencia expresamos el hecho de que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial escribiendo $\pi_1(X, x_0) = 0$

Definición 3.2. Una variedad Riemanniana M es (geodésicamente) **completa** si para todo $p \in M$, la aplicación exponencial, exp_p, esta definida para todo $v \in T_pM$, es decir, si las geodésicas $\gamma(t)$ que parten de p están definidas para todos los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.3. Sea M y N variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ (f es una biyección diferenciable con inverso diferenciable)se llama una **isometría** si:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM \tag{3.1}$$

Definición 3.4. Sean M y N variedades Riemannianas. Sea $U \subset M$ abierto: un difeomorfismo $f : U \longrightarrow f(U) \subset N$ que satisface (3.1) se llama **una isometría local**.

Teorema 3.3 (Hadamard). *Sea M una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura seccional $k(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ y todo $\sigma \subset T_pM$. Entonces M es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, $n = dimM$; más precisamente, $exp_p : T_pM \longrightarrow M$es un difeomorfismo.*

Teorema 3.4 (E. Cartan). *Sean $M, \tilde{M}$ variedades Riemannianas, al que, $dimM = dim\tilde{M} = n$. Sean $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$. Elegimos una isometría lineal*

$$i : T_p(M) \longrightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M}).$$

Sea $V \subset M$ una vecindad normal de p tal que $exp_{\tilde{p}}$esta definida en i o $exp_p^{-1}(V)$. Definimos $f : V \longrightarrow \tilde{M}$ por

$$f(q) = exp_{\tilde{p}} \circ i \circ exp_p^{-1}(q), \quad q \in V$$

Para todo $q \in V$ existen una única geodésica normalizada $\gamma : [0, t] \longrightarrow M$con $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$. Sea P_t el transporte paralelo a lo largo de γ de $\gamma(0)$ a $\sigma(t)$. Definimos

$$\phi_t : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(\tilde{M})$$

por $\phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ P_t^{-1}(v), v \in T_p(M)$ donde $\tilde{P}_t$ es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica normalizada $\tilde{\gamma} : [0, t] \longrightarrow \tilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}, \tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Finalmente indicamos por R y $\tilde{R}$ las curvaturas de M y $\tilde{M}$, respectivamente.

En estas condiciones el teorema de Cartan indica: Con las notaciones anteriores, si para todo $q \in V$ y todo x y $u, v \in T_q(M)$ se tiene:

$$\langle R(x, y)u, v\rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v)\rangle$$

entonces $f : V \longrightarrow f(V) \subset \tilde{M}$ es una isometría local y $df_p = i$.

Definición 3.5. Un grupo G opera (a izquierda) en un conjunto M si existe una aplicación

$$G \times M \longrightarrow M$$

$$(g, x) \in G \times M \longrightarrow gx \in M$$

tal que $ex = x$, $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$, donde e es la identidad de $G, x \in M$ y $g_1, g_2 \in G$, G**opera libremente** (es decir, sin puntos fijos) en M si $g_x = x$ implica $g = e$. La **órbita** de $x \in M$ es el conjunto $G_x = \{gx : g \in G\} \subset M$. La acción de G es transitiva si $Gx = M$.

Nota 3.1 (A). M/G: conjunto de todos las órbitas $= \{Gx : x \in M\}$, además existe una proyección natural $\pi : M \longrightarrow M/G$ definida por $\pi(x) = Gx$. Cuando M tiene alguna estructura adicional (topológica, diferencial, etc.) es conveniente considerar G como un grupo de isomorfismos (homeomorfismo, difeomorfismos, etc.)

En este caso, la proyección $\pi : M \longrightarrow M/G$ (M/G tiene la topología cociente) es una aplicación de recubrimiento regular y G es el grupo de las transformaciones de recubrimiento.

Proposición 3.5. *Sea $\tilde{M}$ un espacio de recubrimiento de una variedad Riemanniana M. Entonces es posible dotar a $\tilde{M}$ de una estructura Riemanniana tal que la aplicación de recubrimiento $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ sea una isometría local (esta métrica es llamada la* **métrica del recubrimiento***). $\tilde{M}$ es completa $\Longleftrightarrow$ M es completa.*

Nota 3.2 (B). Un espacio recubridor $\tilde{X}$ de X se llama **espacio recubridor universal** o un **recubrimiento universal** si $\tilde{X}$ es simplemente conexo.

Lema 3.6. *Sean $f_i : M \longrightarrow N,\ i = 1, 2,$ dos isometrías locales de la variedad Riemanniana (conexa) M en la variedad Riemanniana N. Supongamos que existe un punto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ y $(df_1)_p = (df_2)_p$. Entonces $f_1 = f_2$*

Nota 3.3 (C). Si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo y una isometría local para cada $p \in M$, entonces f es globalmente una isometría.

El recíproco no se cumple:

Ejemplo 3.1. el plano P de $\mathbb{R}^3$ es localmente isométrico al cilindro $C = x^2 + y^2 = 1$. Entonces P y C ni siquiera son homeomorfos

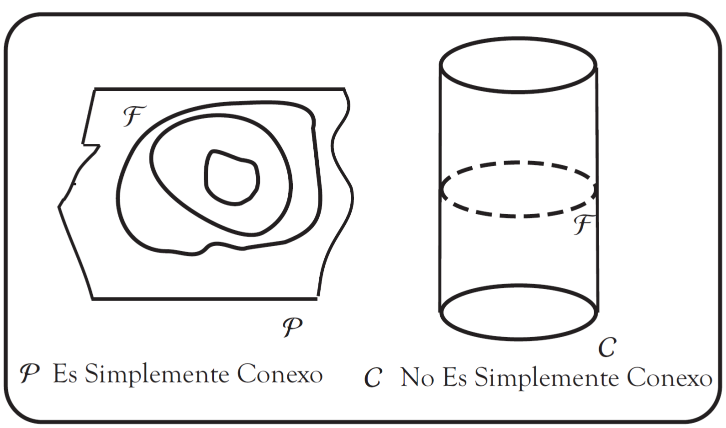

Figura 3.3: Conexos

Teorema 3.7 (Gauss). *La curvatura seccional k es invariante por isometrías locales. Mas precisamente, si $f : U \subset M \longrightarrow N$ es una isometría local, entonces para todo $p \in U$, la curvatura de M en p es igual a la curvatura de N en $f(p)$*

Demostración. Demostración de la Proposición 3.1. Como $\tilde{M}$ es un recubrimiento universal de M, entonces por (3.5) (A) y (3.7) $\tilde{M}$ es una variedad Riemanniana completa , simplemente conexa y de curvatura secciona constate k.

Veamos los casos (a), (b), dejando como ejercicio el caso (c). Denotemos por $\triangle$ tanto a $\mathbb{R}^n$ como H^n. Fijemos $p \in \triangle$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y una isometría lineal

$$i : T_p(M) \longrightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M}).$$

Consideremos la aplicación

$$f = exp_{\tilde{p}} \circ i \circ exp_p^{-1} : \triangle \longrightarrow \tilde{M}$$

tal como se construyo la función f en la introducción del Teorema de Cartán, por este teorema f es una isometría local. Como $\triangle$ y $\tilde{M}$ son completas con curvatura seccional ≤ 0, entonces aplicando (3.3)(teorema de Hadamard), entonces f es difeomorfismo, entonces por (Nota C) f es globalmente una isometría. □

Demostración. Demostración de Proposición 3.2.

- Consideremos el recubrimiento universal $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ y definamos en $\tilde{M}$ la métrica del recubrimiento tal que p es una isometría local.
- Sea Γ el grupo de las transformaciones del recubrimiento de p. Como M tiene estructura diferenciable, entonces Γ es un subgrupo del grupo de isometrías de $\tilde{M}$ que opera de manera totalmente discontinua en $\tilde{M}$ (en realidad Γ es un grupo de recubrimiento de p).

  Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in M$; $\tilde{x} \sim \tilde{y} \Longleftrightarrow \exists g \in \Gamma$ tal que $\tilde{g} = g$. Consideremos el cociente $\tilde{M}/\Gamma$. Como Γ opera de manera totalmente discontinua en $\tilde{M}$, entonces

  (i) podemos definir en $\tilde{M}/\Gamma$ una estructura diferenciable tal que $\pi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma$ es diferenciable local
  (Γ es también recubrimiento, por que Γ opera de manera totalmente discontinua en $\tilde{M}$).

  (ii) Definimos en $\tilde{M}/\Gamma$ la métrica inducida por $\pi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma$ tal que π es isometría local.

- Como el recubrimiento p es regular, Γ opera transitivamente sobre

  $$p^{-1}(x); x \in M$$

  Sea $\tilde{x}, \tilde{y}$ en $\tilde{M}$. Entonces $\Gamma\tilde{x} = \{g\tilde{x} : g \in \Gamma\} = \tilde{M} = \Gamma\tilde{y} = \{g\tilde{y} : g \in \Gamma\}$. Con $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x)$. Se tiene: $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) \Longleftrightarrow \Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y} \Longleftrightarrow \pi(\tilde{x}) = \pi\tilde{y}$. Notemos que $\tilde{M}/\Gamma = \{\Gamma\tilde{x} : \tilde{x} \in \tilde{M}\}$. Consideremos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$, se tiene: $\tilde{x} \sim \tilde{y} \Longleftrightarrow \exists g \in \Gamma$ tal que $\tilde{y} = g\tilde{x}$. Luego las clases de equivalencias dadas por: (a) P, con p aplicación cociente, y (b) π, son iguales. Entonces se induce una biyección $\xi : M \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma$ tal que $\pi = \xi \circ p$:

  $$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[dl, "\xi"] \\ \tilde{M}/\Gamma & \end{tikzcd}$$

  Como π y p son isometrías locales, entonces ξ también es isometría local. Como ξ es biyección, entonces ξ es una isometría.

□

Como una conclusion: Los espacios de la geometría no-euclidiana son encontrados entre las formas espaciales. De ahí la importancia de la determinación de las formas espaciales los casos S^n, P^n y H^n son llamados geometría esférica, elíptica e hiperbólica respectivamente.

3.3 Conclusion y recomendaciones

UNA de las conclusiones centrales del trabajo, es la caracterización Riemannianas de curvatura constante. Como casos particulares S^n, P^n, H^n. Como consecuencia, una recomendación curricular es la necesidad de implementar y desarrollar de manera integral las geometrías: esférica, proyectiva e hiperbólica.

Referencias Bibliográficas

[1] Howard Heves Centro, *Estudio de las Geometrías*.

[2] Willian S. Mamey, *Introducción a la Topología Algebraica*, Regional Mexico 1969.

[3] M.P. Do Carmo, *Geometría Riemanniana*, IMPA Brasil, 1988.