Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 33–46

IIMAT

Dimensiones en $\mathbb{Z}^{\star}$

Andrés Alberdi[a,*]

[a] *UMSA, Carrera de Matemática, La Paz, Bolivia.*

Resumen

Se proponen un conjunto de Axiomas, que generalizan los Axiomas de Incidencia de Hilbert con objetos en Dimensiones positivas y negativas, a partir de Teoría de Conjuntos. Históricamente la Geometría se ha basado en el punto, recta, plano y otros conceptos intuitivos basados en una axiomática formalizada desde Euclides hasta Hilbert y Tarski. Por otra parte, el concepto de dimensión de un objeto geométrico ha sido el resultado de las construcciones axiomáticas o algebraicas de la geometría. En el presente trabajo, inicialmente se construyen los "$\mathbb{Z}$-espacios", que son abstracciones y generalizaciones de los objetos geométricos básicos, con base en relaciones t, $\cong$ y u, brindando los resultados más básicos de estas e incorporando un primer axioma. Posteriormente se definen m y M que determinan relaciones entre dimensiones de los $\mathbb{Z}$-espacios y se establecen los axiomas más importantes, tanto de incidencia como de unicidad, construyendo sobre ellos las funciones $\uparrow$ y $\downarrow$, que permiten construir nuevos elementos de $\mathbb{Z}$-espacios, con base en otros existentes, además de sus propiedades básicas. Luego se realiza un ejemplo a modo de mostrar las construcciones anteriormente definidas y estructuradas, construyendo los 8 axiomas de incidencia de Hilbert, con base en los $\mathbb{Z}$-espacios, las relaciones $t, \cong, u$ y los operadores $\uparrow, \downarrow, m$ y M. Logrando el objetivo central del presente trabajo. Finalmente, se construyen las definiciones y axiomas de Paralelismo Fuerte, que generan la Geometría Euclidiana y se incluyen propiedades adicionales que fueron desarrolladas en Talleres de Investigación durante el año 2017. Se aclara que durante el año 2018 existieron nuevos Talleres de Investigación en la Carrera de Matemática, donde se realizaron varios complementos y mejoras al presente trabajo, que serán presentados en la siguiente edición de la Revista Boliviana de Matemática.

Palabras clave: Dimensiones, Geometría, Geometría Axiomática, Axiomas de Hilbert, Axiomas de Incidencia, Dimensiones Negativas

Introducción

Agradeciendo al gentil lector por su interés en el presente trabajo, pasamos al desarrollo[1]:

La Geometría es una disciplina que se viene estudiando desde hacen más de cinco mil años, apareciendo originalmente en Babilonia e India, en esa época se comenzaban a abstraer algunas ideas básicas como triángulos, longitudes, áreas, círculos y otros para resolver problemas prácticos como medición de terrenos, construcción, astronomía para mejorar los cultivos, etc. El proceso de abstracción era el siguiente: se hacían mediciones concretas, se generalizaban estas mediciones, se construían propiedades en base a estas generalizaciones y usaban las mismas propiedades en otras aplicaciones concretas.

La cultura Griega hizo significativos avances en la Geometría[0], sobre todo con el monumental hito de *Los Elementos de la Geometría* de *Euclides* aproximadamente en el año 300 AC [2]. En esta obra se define por primera vez en la historia los conceptos de *punto*, *recta* y *plano*. Esto significó a su vez un importante avance en la abstracción a nivel de conceptos, ya que estos sirven para dar fundamento a las figuras y los cuerpos. Sin embargo algunos conceptos permanecían intuitivos como las congruencias, que un punto está entre otros dos puntos y otros.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, el genio de David Hilbert formalizó los conceptos que habían quedado pendientes desde la Grecia antigua, en su libro *Grundlagen der Geo-*

[☆] Propuesta de Generalización de los Axiomas de Incidencia de Hilbert.

[*] ✉ aalberdi@gmail.com

`aalberdi@gmail.com` (Andrés Alberdi)

[1] Agradezco a todos los participantes del Taller de Investigación los aportes que han realizado, para poder llegar a la presente versión del Documento

[0] Se aclara que todas las referencias a enlaces de páginas Web se datan al mes de Mayo de 2017

[2] http://www.claymath.org/euclids-elements

metrie [3], que inició el tratamiento contemporáneo de la Geometría Euclidiana y abrió diferentes ramas de la Geometría, muchas de las cuales se siguen desarrollando hasta nuestros días. Los conceptos primitivos de esta axiomática son: *punto*, *línea*, *plano*, *esta entre*, *está contenido* y *congruencia*, cuyas propiedades están determinadas en su obra.

A mediados de los años 1960, Alfred Tarski postuló una importante axiomática de la Geometría [4] [5], que generalizaba aun más los conceptos de Hilbert y la dotaba de propiedades deseables como ser una *teoría de primer orden* (la axiomática de Hilbert es de segundo orden), ser *decidible* y ser *completa* (tomando en cuenta los teoremas de Gödel). Los conceptos primitivos en esta axiomática son: *punto*, *estar entre* y *congruencia*, estas dos últimas relaciones se describen en su obra.

El estudio de los fundamentos de la Geometría es vasto, ya que contiene elementos históricos, elementos lógicos, da pié a varias áreas de la Matemática e inclusive linda con la filosofía, un interesante estudio introductorio se puede ver en la Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea [6].

La motivación fundamental para esta propuesta se origina en una charla en el café de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) en 1990 con Efraín Cruz y Eduardo Palenque, donde se conversó sobre la posibilidad de la existencia de *Dimensiones Negativas*. Luego se tuvo una exposición en el Primer Congreso Boliviano de Matemática en 1991 planteando esta idea y un Seminario Estudiantil sobre Dimensiones Negativas Intuitivas entre 1992-1993 para explorar aun más estos conceptos. Luego de muchas aproximaciones conceptuales, en Mayo de 2017 aparecieron los primeros bosquejos de generalización y formalización de estas ideas, que fueron consolidándose hasta Octubre de 2017, mes en el que se presentaron por primera vez en el XX Congreso Boliviano de Matemática en ocasión del quincuagésimo aniversario de la fundación de la Carrera de Matemática de la UMSA, así también se presentó la primera versión del presente documento.

Conceptos a Generalizar

Los objetos primitivos o nociones primitivas de la Geometría que se pretenden generalizar (entre otros) son los siguientes:

- Punto - Este concepto primitivo es el más sencillo de entender pero el más difícil de generalizar, debido a que en cualquier estudio se debe partir de ***algo***, sobre todo en Matemática, donde se parte del natural 0, del conjunto vacío y otros.
- Espacio - Este concepto sobreentendido es el marco en el cual se presentan las diferentes axiomáticas, es el campo de acción o universo en el cual se opera.
- Está contenido - Si aceptamos que los puntos son objetos que tienen una relación de pertenencia en el Espacio, esa relación es de contención: *un punto está contenido en un espacio*.
- Recta, Plano - En la axiomática de Hilbert se pueden observar estos conceptos primitivos, que sin embargo no son nociones primitivas en la axiomática de Tarski.

Desde un punto de vista clásico, la presente propuesta solamente trata sobre los axiomas de incidencia en la axiomática de Hilbert [7], es decir, generalizar lo siguiente:

- Las nociones primitivas: Punto, Recta y Plano
- La relación primitiva *“yace en”*
- Los 8 axiomas de *Incidencia*

El resto de los Axiomas de Hilbert (Secciones II, III, IV y V) pueden ser extendidos considerando los axiomas que se presentan en presente documento.

En términos de Geometría Vectorial (Geometría desde el punto de vista Vectorial)[8], usualmente se consideran los siguientes resultados:

- El Punto tiene cero dimensiones.
- La Recta tiene una dimensión.
- El Plano tiene dos dimensiones.
- El Espacio (regular) tiene tres dimensiones.
- Se consideran espacios n-dimensionales con dimensiones mayores a 3, que están fuera del estudio de la geometría euclidiana.

De esta manera, se relacionan usualmente los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ con las dimensiones de los conceptos geométricos, clasificándolos de cierta manera a partir de $\mathbb{N}$.

Intuitivamente, los conceptos fundamentales de este documento serán:

1. ***$\mathbb{Z}$-Espacio***: Generalizando los conceptos tradicionales de los puntos, las rectas, los planos, los espacios, etc., aquí se llamará $\mathbb{Z}$-*Espacio* a cualquiera de estos conjuntos, así como a los espacios n-dimensionales y a otros objetos abstractos que tendrían dimensión negativa.

[3] http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf
[4] http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.9012
[5] The Bulletin of Symbolic Logic Volume 5, Number 2, June 1999
[6] https://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/
[7] Una versión simplificada se encuentra en: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms
[8] N.V.Efímov, Geometría Superior Ed. Mir, Capítulo VII Sec 1

2. ***Función*** [ ]: Que sería como la función inversa de la "Dimensión".
3. ***Relación*** t:Generalizando la relación primitiva "yace en", a partir de una relación binaria entre elementos de $\mathbb{Z}$-*Espacios*.
4. ***Relación*** $\cong$: Contextualiza la igualdad de elementos de $\mathbb{Z}$-espacios.
5. ***Relación*** u:Generaliza la relación t.
6. m, M: Permiten relacionar elementos de diferentes $\mathbb{Z}$-espacios.
7. ***Relaciones*** $\uparrow, \downarrow$: Generalizan el concepto de "Incidencia".
8. ***Relación*** p: Generaliza el concepto de "Paralelismo".

En términos formales, conforme las definiciones y axiomas que se plantean, el principal óbice para hacer una analogía de la construcción que se hace en el presente trabajo con la geometría analítica clásica, sería la axiomática de la teoría de conjuntos tradicional, que impide las construcciones infinitas de la forma $\forall i \in \mathbb{N} : A_{i+1} \in A_i$, debido al *Axioma de regularidad* [9], que establece:

$$A \neq \varnothing \to (\exists x)(x \in A \land (\forall y)(y \in x \to y \notin A))$$ [10]

Sin embargo, *"es posible construir sistemas de teoría de conjuntos que contradigan este axioma"* [11], como ejemplo se tiene el sistema de ontología de Lesniewski y el sistema de Quine. Por otro lado, al estructurar la demostración de la consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis del Continuo con los Axiomas de la teoría de conjuntos, K.Gödel indica que *"el Axioma de Regularidad no es indispensable pero simplifica el trabajo"* [12].

Reforzando estos conceptos, sobre el tema de teorías axiomáticas alternativas de conjuntos, existe un artículo extenso, con muchas referencias y bibliografía en la Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea [13]. En el mismo se puede encontrar el Axioma Anti-Fundacional (Anti-Foundation Axiom - AFA), una de cuyas equivalencias establece:

Todo grafo tiene una única decoración.[14] [15]

Para comprender este axioma alternativo se requiere desarrollar teoría de Grafos, que no es necesaria para el presente documento.

[9] P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma, pp. 34-35

[10] Sin embargo, se observa que en el presente trabajo no se utiliza la relación $\in$ para relacionar dos elementos de los $\mathbb{Z}$-espacios.

[11] Extraído textualmente de P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma, pág 36

[12] Extraído textualmente de K.Gödel, Obras Completas, Ed. Alianza Universidad, pág 237 y 238

[13] https://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/

[14] Como se puede apreciar en el punto 2.3 de la cita 12

[15] Un "Grafo"es un par (G, f), donde f es una relación en G.
Una "decoración"de un grafo es una función d con dominio G tal que $d(g) = \{d(h) : (g, h) \in f\}$.

Evitando el óbice previamente mencionado, en el presente trabajo, en lugar de la pertenencia regular $\in$ entre elementos de $\mathbb{Z}$-espacios, se usa la definición de ***relación*** t con propiedades particulares descritas más adelante, evitando así el uso de sistemas axiomáticos alternativos como aquellos que incluyan AFA.

En el presente documento se utilizarán como base los conceptos y notaciones tradicionales siguientes:

- De Lógica Matemática de primer orden como: $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \land, \lor$
- De Teoría de Conjuntos como: $\bigcup, \times, \in, \notin, \subset, =$ [16], $-$ [17]
- Del grupo igualitario ordenado $(\mathbb{Z}, +)$, con $=, +, -$, *producto*, $<, >, \leq, \nleq$, etc.

1. $\mathbb{Z}$-Espacios

En esta sección se plantearán los conceptos básicos del documento que son los $\mathbb{Z}$-espacios y la relación t entre elementos de $\mathbb{Z}$-espacios consecutivos, con sus propiedades D1 y D2, más los operadores t^* y t_*, además de algunas observaciones y resultados iniciales que serán de utilidad para las siguientes secciones.

Sea $(\mathbb{Z}, +)$ el grupo de enteros con la suma usual:

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ tomamos un conjunto no vacío, denotado $[x]$, tal que:
Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$ [18], tenemos que $x = y \Leftrightarrow [x] = [y]$

Es decir, tomamos una función inyectiva:

$$\begin{aligned} [\ ] : \mathbb{Z} &\longrightarrow \overline{Conj} - \{\varnothing\} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Llamamos $\mathbb{Z}$-*Espacios* o solo *Espacios* a los conjuntos no vacíos $[x]$

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ tomamos en cuenta los conjuntos $[x] \times [x+1]$.

Denominamos a $\Upsilon = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} [x]$ *"El conglomerado"*.

Definición 1. [19]
Sea $t_x \subset [x] \times [x+1]$ una relación[20]
formamos el conjunto t tal que $(A, B) \in t$ si y solo si

[16] Dependiendo del contexto, "="podrá ser igualdad de conjuntos o igualdad de enteros.

[17] Dependiendo del contexto, "−"podrá ser diferencia de conjuntos o diferencia de enteros.

[18] Se denota así cuando $x \in \mathbb{Z}$ y $y \in \mathbb{Z}$

[19] Esta definición fue ajustada gracias al aporte de Helder Lopez y Marcos Canedo.

[20] Se observa que esta relación t_x se define conforme los puntos D1 y D2 más abajo.

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [x+1] \wedge (A, B) \in t_x)$$

que cumplan[21]:

D1 $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall B \in [x])(\exists A \in [x+1])(\exists C \in [x-1])(CtB \wedge BtA)$

D2 $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall B \in [x])(\exists A' \in [x+1])(\exists C' \in [x-1])(C' \not{t} B \wedge B \not{t} A')$

De ahora en adelante tomaremos la relación t y los conjuntos $[x]$ tal que cumplan D1 y D2, conforme lo señalado previamente.

Cuando ocurra que $(A, B) \in t$ denotaremos AtB y cuando ocurra que $(A, B) \notin t$ denotaremos $A \not{t} B$.

Vemos que $t = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}} t_x \subset \bigcup_{x\in\mathbb{Z}}([x] \times [x+1])$.

Asimismo, $t \subset \Upsilon \times \Upsilon$ es una relación, ya que $(\forall x \in \mathbb{Z})([x] \subset \Upsilon)$.

Observaciones y Comentarios

Con las definiciones mencionadas, se puede observar lo siguiente, con $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$:

Obs 1.1 El conjunto $t_x = [x] \times [x+1] = \{(X, Y) : X \in [x] \wedge Y \in [x+1]\}$ está bien definido y no es vacío porque ninguno de los conjuntos $[x]$ es vacío.

Obs 1.2 Si $A, B \in Im([\,])$, AtB solamente está definida si $[B]^{-1} = [A]^{-1} + 1$. [22]

Obs 1.3 Es contradictorio que AtB y BtA, simultáneamente, pues en ese caso tendríamos que $x = x + 1$ en $\mathbb{Z}$.

Obs 1.4 La función $[\,] : \mathbb{Z} \longrightarrow Im([\,])$ es biyectiva y podemos definir $[\,]^{-1}(A) = [A]^{-1} = x$.

Obs 1.5 $A \in [[A]^{-1}]$ y $x = [[x]]^{-1}$

Obs 1.6 Es importante observar que los puntos D1 y D2 de la definición 1 describen cómo están escogidos los conjuntos $[x]$, no solamente cómo está definida la relación t.

Obs 1.7 Se puede entender la función $[\,]^{-1}$ como la *"Dimensión"* del $\mathbb{Z}$-espacio $[x]$.

Obs 1.8 Se puede entender la relación AtB como "*A está totalmente en B*", como podremos observar más adelante.

[21] Se observa que t restringido a $[x] \times [x+1]$ coincide con t_x ($t|_{[x]\times[x+1]} = t_x$) directamente de la definición de t.

[22] Tomando en cuenta que la función $[\,]$ es inyectiva.

Propiedades

A continuación algunos resultados, con base en las definiciones señaladas:

Proposición 1. *Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existen $A, B \in [x]$, que no son iguales $A \neq B$.* [23]

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}$ entonces existe $A \in [x]$ ya que $[x] \neq \varnothing$. Existe $C \in [x+1]$, AtC por D1 y además existe $B \in [x]$, $B \not{t} C$ por D2 (ambos en la página 35).
Sin embargo, los elementos $A, B \in [x]$ no pueden ser iguales ya que AtC, $B \not{t} C$.
Por tanto existen al menos dos elementos que no son iguales en cada conjunto $[x]$, $A \neq B$. □

Proposición 2. *Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, tal que $x < y$, dado $A \in [x]$ tenemos que:*
existe $B \in [y]$ y existe $I = \{x, x+1, \ldots, y-1, y\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$ donde $D_y = B$, $D_x = A$ y $i \neq y \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$. [24]

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x < y$ y sea $A \in [x]$, usaremos inducción.

Si $y = x + 1$ aplicando D1[25] a A tenemos que: $(\exists D_{x+1} \in [x+1])(AtD_{x+1})$
entonces $I = \{x, x+1\}$ donde $B = D_{x+1}$ y $D_x = A$.

En general, si existe $I = \{x, x+1, \ldots, y-1\}$ tal que
$(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$ donde $D_x = A$ y $(i \neq y-1) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$
Aplicamos D1 a D_{y-1} obteniendo la existencia de $D_y \in [y]$ tal que $D_{y-1} t D_y$
Así obtenemos un conjunto $I = \{x, x+1, \ldots, y-1, y\}$ donde $(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$
que cumple $i \neq y \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$.
Llamamos $B = D_y$ y sabemos que $A = D_x$. □

Proposición 3. *Para todos $x, z \in \mathbb{Z}$, tal que $x > z$, dado $A \in [x]$ tenemos que:*
existe $C \in [z]$ y existe $I = \{z, z+1, \ldots, x-1, x\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$ donde $E_z = C$, $E_x = A$ y $i \neq x \Rightarrow (E_i t E_{i+1})$.

Demostración. Sean $x, z \in \mathbb{Z}$ tales que $x > z$ y sea $A \in [x]$, usaremos inducción.

Si $z = x - 1$ aplicando D1[26] a A tenemos que: $(\exists E_{x-1} \in [x-1])(E_{x-1} tA)$
entonces $I = \{x-1, x\}$ donde $C = D_{x-1}$ y $D_x = A$.

[23] Se refiere a la igualdad como elementos de un conjunto.

[24] Este tipo de construcción será muy importante más adelante.

[25] En la página 35

[26] En la página 35

En general, si existe $I = \{z-1, z-2, \dots, x-1, x\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$ donde $E_x = A$ y $(i \neq x) \Rightarrow (E_i t E_{i+1})$
Aplicamos D1 a E_{z-1} obteniendo la existencia de $E_z \in [z]$ tal que $E_z t D_{z-1}$
Así obtenemos un conjunto $I = \{z, z-1, \dots, x-1, x\}$ donde $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$
que cumple $i \neq x \Rightarrow (E_i t E_{i+1})$.
Llamamos $C = E_z$ y sabemos que $A = E_x$. □

Operadores t_* y t^*:

Definición 2. Sea $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, definimos los conjuntos:
$t^*(A) = \{B \in [x+1] : AtB\}$
$t_*(A) = \{C \in [x-1] : CtA\}$

Si tomamos $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, se observa lo siguiente:

Obs 1.9 $t^*(A) \neq \emptyset$ y $t_*(A) \neq \emptyset$ por D1 (página 35).

Obs 1.10 $t^*(A) \subset [x+1]$ y $t_*(A) \subset [x-1]$ por definición 2.

Obs 1.11 $[x+1] - t^*(A) \neq \emptyset$ y $[x-1] - t_*(A) \neq \emptyset$ por D2 (página 35).

Obs 1.12 $A \in t^*(B)$ solo tiene sentido si $[A]^{-1} = [B]^{-1} + 1$.[27]

Obs 1.13 $A \in t_*(B)$ solo tiene sentido si $[A]^{-1} = [B]^{-1} - 1$.

Obs 1.14 $A \in t^*(B)$ si y solamente si BtA si y solamente si $B \in t_*(A)$ por las Obs 1.2, 1.12 y 1.13.

2. Congruencia

En esta sección se brindará la relación de equivalencia $\cong$ y las relaciones $\prec$ y $\succ$, que permiten comparar dos elementos de un $\mathbb{Z}$-espacio, junto con algunas observaciones y propiedades importantes, además de plantear el primer Axioma.

Sea $x \in \mathbb{Z}$:

Definición 3. Sean $A, A' \in [x]$ se denota $A \prec A'$ y se dice que A *es semicongruente a* A' si $(\forall B \in [x-1])(BtA \Rightarrow BtA')$

Definición 4. Sean $A, A' \in [x]$ se denota $A \cong A'$ y se dice que A y A' *son congruentes* o *coinciden* si $(\forall B \in [x-1])(BtA \Leftrightarrow BtA')$

Axioma 1 (Ax1)**.** *Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x+1]$* [28]*, entonces* $(BtC \wedge A \prec B) \Rightarrow AtC$.

[27] Se han corregido varios de estos puntos, gracias a las observaciones de Marcos Canedo.
[28] Esto equivale a $[A]^{-1} = [B]^{-1}$ y $[C]^{-1} = [A]^{-1} + 1$

Observaciones y Comentarios

Si $x \in \mathbb{Z}$, tenemos:

Obs 2.1 Si $A, B \in [x]$ entonces, usando las definiciones previas, se obtiene inmediatamente: $A \cong B \Leftrightarrow (A \prec B) \wedge (B \prec A)$ [29]

Obs 2.2 Si $A, B \in [x]$, se denota también $B \succ A$ cuando $A \prec B$.

Obs 2.3 En el resto del documento se usará sobre todo la relación $\cong$, no tanto las relaciones $\prec$ y $\succ$.

Obs 2.4 Las relaciones $A \cong B$, $A \succ B$ y $A \prec B$ solamente están definidas si existe $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B \in [x]$, lo que equivale a $[A]^{-1} = [B]^{-1}$.

Obs 2.5 De la definición 4 se tiene inmediatamente que $A \cong B$ equivale a $B \cong A$.

Obs 2.6 Por Ax1, si $A, B \in [x]$ y $C \in [x+1]$ se tiene:
$t_*(A) \subset t_*(B)$ y $B \in t_*(C)$ implican $A \in t_*(C)$.

Obs 2.7 Si $A, B \in [x]$, se tiene que $A \cong B \Leftrightarrow t_*(A) = t_*(B)$, por la definición 4.

Obs 2.8 Si $A, B \in [x]$, se tiene que $A \prec B \Leftrightarrow t_*(A) \subset t_*(B)$, por la definición 3.

Propiedades

Si $x \in \mathbb{Z}$, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 4.

a) *Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x+1]$, entonces:* $(BtC \wedge A \cong B) \Rightarrow AtC$.

b) *Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existen $A, B \in [x]$ tales que $A \ncong B$.*

Demostración.

a) Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x+1]$
Si BtC y $A \cong B$, entonces $A \prec B$ y $B \prec A$, como se indicó en Obs 2.1.
Así tenemos BtC y $A \prec B$ por tanto, aplicando Ax1, tenemos que AtC.

b) Si $x \in \mathbb{Z}$, supongamos que $(\forall A, B \in [x])(A \cong B)$
Sea $C \in [x+1]$, entonces por D1 y D2 existen $A', B' \in [x]$ tales que $A'tC$, $B'tC$
Así $B'tC$ y como $A' \cong B$ por la hipótesis (1), entonces $B'tC$ por la Proposición 4.a., lo que es contradictorio.
Por tanto existen $A, B \in [x]$ tales que $A \ncong B$. □

Proposición 5. *La relación $\cong$ es de equivalencia.*

Demostración. Sean $A, B, C \in [x]$

a) $(\forall D \in [x-1])(DtA \Leftrightarrow DtA)$ por tanto, por la Definición 4, $A \cong A$.

[29] Que puede ser usado de manera equivalente como definición de $\cong$.

b) Por la Obs 2.5

c) Sean $A \cong B$ y $B \cong C$, tomemos $D \in [x-1]$
entonces $(DtA \Leftrightarrow DtB) \wedge (DtB \Leftrightarrow DtC)$ por tanto $DtA \Leftrightarrow DtC$.
Así: $(\forall D \in [x-1])(DtA \Leftrightarrow DtC)$ de donde $A \cong C$. □

Proposición 6. *La relación $\prec$ es de orden respecto a $\cong$.*

Demostración. Sean $A, B, C \in [x]$

a) $(\forall D \in [x-1])(DtA \Rightarrow DtA)$ por tanto $A \prec A$.

b) Sean $A \prec B$ y $B \prec A$, entonces $A \cong B$ como se indicó en Obs 2.1.

c) Sean $A \prec B$ y $B \prec C$, tomemos $D \in [x-1]$
entonces $(DtA \Rightarrow DtB) \wedge (DtB \Rightarrow DtC)$, por tanto $DtA \Rightarrow DtC$.
Así: $(\forall D \in [x-1])(DtA \Rightarrow DtC)$ de donde $A \prec C$. □

Proposición 7. *La relación $\cong$ es compatible con la relación t por ambos lados.*

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ y $C, D \in [x-1]$ tales que $A \cong B$ y $C \cong D$

a) Si suponemos que CtA entonces DtA por la Proposición 4.a.
Como DtA entonces DtB por la definición de $\cong$.

b) Si suponemos que DtB entonces CtA por simetría de $\cong$, usando el mismo procedimiento de la Proposición 7.a. □

3. Relaciones y operadores *u*

En esta sección se definirá la "relación"u, que permite vincular dos elementos de cualquier $\mathbb{Z}$-espacio, además definir los operadores unarios u^* y u_*, junto con algunas de las propiedades y observaciones importantes de u.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

Definición 5. [30] Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ tales que $x \leq y$ definimos la relación binaria $u_{xy} \subset [x] \times [y]$, donde $(A, B) \in u_{xy}$ siempre y cuando se cumpla:
$(\forall i \in \{x, \ldots, y\})(\exists D_i \in [i])(D_x \cong A \wedge D_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$

Formamos el conjunto u tal que $(A, B) \in u$ si y solo si

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y] \wedge (A, B) \in u_{xy})$$

Denotamos AuB en lugar de $(A, B) \in u$ [31].

[30] Esta definición fue ajustada gracias al aporte de Marcos Canedo.
[31] De manera similar a t

Observaciones y Comentarios

Si $x \in \mathbb{Z}$, tenemos:

Obs 3.1 La relación AuB conforme la definición 5 solamente tiene sentido si existen $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$ tales que $x \leq y$, lo que equivale a $[A]^{-1} \leq [B]^{-1}$

Obs 3.2 La relación u surge naturalmente de la necesidad de contar con una extensión de la relación t, conforme las Proposiciones 2 y 3.

Obs 3.3 En la definición de u (Definición 5), a diferencia de las proposiciones 2 y 3 que incluyen solamente la relación t, observamos que se ha incluido la relación $\cong$ por consistencia de notación, ya que $A \cong A$.

Obs 3.4 Por otra parte, se ha incluido en esta relación u la posibilidad de que $x = y$, que no podía existir en las proposiciones 2 y 3 por la restricción indicada en Obs 1.2.

Propiedades

Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $z \leq x \leq y$ se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 8. *Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ entonces:*
a) $AtB \Rightarrow AuB$ [32] [33]
b) $A \cong B \Rightarrow AuB$
c) Si $(x = y \wedge AuB) \Rightarrow A \cong B$
d) Si AuB y BuA entonces $A \cong B$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$

a) Si AtB entonces $y = x + 1$ por Obs 1.2, así:
$(\forall i \in \{x, y\})(\exists D_i \in [i])(AtD_y)$, donde $D_x \cong A$ y $B \cong D_y$. (debido a que $A \cong A$)
Por tanto AuB.

b) Si $A \cong B$ entonces $x = y$ por Obs 2.4, por tanto $x \not< y$ y:
$(\forall i \in \{x\})(\exists D_x \in [x])(B \cong D_x \cong A)$, debido a que $A \cong A$
Por tanto AuB.

c) Si AuB entonces
$(\forall i \in \{x, \ldots, y\})(\exists D_i \in [i])(D_x \cong A \wedge D_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$
Si consideramos $x = y$, entonces: $(\exists D_x \in [x])(D_x \cong A \wedge D_x \cong B)$
Por la Proposición 5, tenemos que $A \cong B$

d) Si AuB y BuA entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ por Obs 3.1, así $x = y$
Por tanto $A \cong B$, por la Proposición 8.c. □

Proposición 9. *Sean $A, B \in [x]$ $C \in [z]$ y $D \in [y]$ con $z \leq x \leq y$, entonces:*
a) $(AuD \wedge A \cong B) \Rightarrow BuD$.
b) $(CuA \wedge A \cong B) \Rightarrow CuB$.

[32] Esto implica que $t \subset u$
[33] Si $y = x + 1$ entonces $AtB \Leftrightarrow AuB$ ó $t = u$

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ $C \in [z]$ y $D \in [y]$ con $z \leq x \leq y$, tenemos:

a) Si $(AuD \wedge A \cong B)$ entonces:
$(\forall i \in \{x, \ldots, y\})(\exists E_i \in [i])(E_x \cong A \wedge E_y \cong D \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (E_i t E_{i+1})))$
Como $A \cong B$ entonces $E_x \cong B$ y así BuD.

b) Si $(CuA \wedge A \cong B)$ entonces:
$(\forall i \in \{z, \ldots, x\})(\exists D_i \in [i])(D_z \cong C \wedge D_x \cong A \wedge ((z < x) \wedge (i \neq x) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$
Como $A \cong B$ entonces $D_x \cong B$ y así CuB. □

Proposición 10. *La relación u es de orden respecto de ≅.*

Demostración. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ y $C \in [z]$, entonces:

a) $A \cong A$ por tanto AuA por Proposición 8.b.

b) Si $AuB \wedge BuA$ entonces $x \leq y \wedge x \geq y$ por tanto $x = y$ por Obs 3.1
Como AuB, por tanto $A \cong B$, por la Proposición 8.c.

c) Si $C \in [z], A \in [x], B \in [y]$ tales que $CuA \wedge AuB$ entonces:
$(\forall i \in \{z, \ldots, x\})(\exists D_i \in [i])(D_z \cong C \wedge D_x \cong A \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$
$(\forall j \in \{x, \ldots, y\})(\exists E_j \in [j])(E_x \cong A \wedge E_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (j \neq y) \Rightarrow (E_j t E_{j+1})))$
Sea F_k tal que:
$(\forall i \in \{z, \ldots, x-1\})(k = i)$ y definimos F_k como D_i
$(\forall j \in \{x+1, \ldots, y\})(k = j)$ y definimos F_k como E_j
Se puede ver que $D_x \cong A \cong E_x$ por la Proposición 5 de la página 39, así definimos F_x como A, por tanto:
$(\forall k \in \{z, \ldots, y\})(\exists F_k \in [k])(F_z \cong C \wedge F_y \cong B \wedge ((z < y) \wedge (k \neq y) \Rightarrow (F_k t F_{k+1})))$
En consecuencia CuB. □

Proposición 11. *Si $A \in [x]$ entonces:*
a) $(\exists B \in [y])(AuB)$, donde $x \leq y$.
b) $(\exists C \in [z])(CuA)$, donde $z \leq x$.

Demostración. Sea $A \in [x]$s:

a) Supongamos $x = y$ entonces existe $A \in [y]$ tal que AuA.
Supongamos $x < y$, por Proposición 2, existe $B \in [y]$ tal que $(\forall i \in \{x, \ldots, y\})(\exists D_i \in [i])$ donde D_y es B, D_x es A y $i \neq y \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$
Como $D_y \cong B \wedge D_x \cong A$ y $(x < y \wedge i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$, se tiene que AuB.

b) Supongamos $z = x$ entonces existe $A \in [z]$ tal que AuA.
Supongamos $z < x$, por Proposición 3, existe $C \in [z]$ tal que $(\forall i \in \{z, \ldots, x\})(\exists D_i \in [i])$ donde D_x es A, D_z es C y $i \neq x \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$
Como $D_x \cong A \wedge D_z \cong C$ y $(z < x \wedge i \neq x) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$, se tiene que CuA. □

Proposición 12. *La relación ≅ es compatible con la relación u por ambos lados.*

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ y $C, D \in [x-1]$ tales que $A \cong B$ y $C \cong D$
Si suponemos que CuA entonces DuA por la Proposición 9.a., ya que $C \cong D$
Si DuA entonces DuB por la Proposición 9.b., ya que $A \cong B$
Por tanto DuB. □

Operadores u^* y u_*:
Definición 6. Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}$, con $z \leq x \leq y$ y $A \in [x]$, definimos los conjuntos:
$u^*(A)_y = \{B \in [y] : AuB\}$
$u_*(A)_z = \{C \in [z] : CuA\}$

Si tomamos $x, y, z \in \mathbb{Z}$, con $z \leq x \leq y$ y $A \in [x]$, se observa lo siguiente:

Obs 3.5 $u^*(A)_y \neq \varnothing$ por Proposición 11.a y
$u_*(A)_z \neq \varnothing$ por Proposición 11.b.

Obs 3.6 $u^*(A)_y \subset [y]$ y $u_*(A)_z \subset [z]$ por definición 6.

4. Axiomas de incidencia

En esta sección se extenderá la definición de los operadores binarios u^* y u_*, además de los operadores m y M, que permitirán construcciones más avanzadas de elementos de $\mathbb{Z}$-espacios, como se reflejan en las varias observaciones y propiedades. Asimismo se plantean los dos Axiomas de incidencia, nombrados así porque permiten determinar las modalidades de incidencia de dos elementos de $\mathbb{Z}$-espacios cualquiera.

Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tales que $z \leq \{x, y\} \leq w$ [18]:

Definición 7. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, definimos los conjuntos siguientes [19]:
$u^*(A, B)_w = \{C \in [w] : AuC \wedge BuC\}$
$u_*(A, B)_z = \{D \in [z] : DuA \wedge DuB\}$.

Definición 8. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, definimos los enteros siguientes:
$M(A, B) = min\{w \in \mathbb{Z} : u^*(A, B)_w \neq \emptyset\}$
$m(A, B) = max\{z \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_z \neq \emptyset\}$.

Axioma 2 (Ax2). *Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $x \leq y$ entonces:*
a)[20] *Si $\exists m(A, B)$ entonces $M(A, B) = x + y - m(a, b)$*
b)[21] *Si $\nexists m(A, B)$ entonces $M(A, B) = y + 1$.*

[18] Denotando así que z es menor o igual que x y que y, y que w es mayor o igual que x y que y

[19] Se aclara que, la generalización de la presente definición al caso de una cantidad mayor a 2 $\mathbb{Z}$-espacios, presenta problemas más complejos, que se tratan en la "Teoría de la Incidencia "o "Incidence Geometry ", como referencia https://en.wikipedia.org/wiki/Incidence_geometry

[20] Exactamente esta igualdad se encuentra como un resultado (no generalizado) en el libro Álgebra Geométrica de E.Artin teorema 1.4.

[21] Esta igualdad se puede deducir fácilmente del teorema 1.3 del libro Álgebra Geométrica de E.Artin.

Observaciones y Comentarios

Si $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tales que $z \leq \{x, y\} \leq w$ con $A \in [x]$ y $B \in [y]$, tenemos:

Obs 4.1 El conjunto $u^*(A, B)_w$ solo tiene sentido si se cumple que $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $\{x, y\} \leq w$

Obs 4.2 El conjunto $u_*(A, B)_z$ solo tiene sentido si se cumple que $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $z \leq \{x, y\}$

Obs 4.3 $u^*(A, B)_w \subset [w]$ y $u_*(A, B)_z \subset [z]$

Obs 4.4 $M(A, B), m(A, B) \in \mathbb{Z}$ en caso que existan. $M(A, B)$ siempre existe por Ax2.a y Ax2.b.

Obs 4.5 Si existe $m(A, B)$, entonces $m(A, B) \leq \{x, y\} \leq M(A, B)$ pues $m(A, B)$ se elige entre los $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z \leq \{x, y\}$ y $M(A, B)$ se elige entre los $w \in \mathbb{Z}$ tal que $\{x, y\} \leq w$.

Obs 4.6 Si $x = y$ entonces $m(A, B) \leq x \leq M(A, B)$ por la Obs 4.5.

Obs 4.7 Si $A \cong B$ entonces $m(A, B) = x = M(A, B)$ por la Proposición 9 y Definición 8.

Obs 4.8 Si $A \cong B$ entonces $x = y$
$(\forall w \geq x)(u^*(A, B)_w = u^*(A)_w)$ y
$(\forall z \leq x)(u_*(A, B)_z = u_*(A)_z)$.

Obs 4.9 Si AtB entonces $y = x + 1$, $m(A, B) = x < y = M(A, B)$ por la Obs 4.5.

Obs 4.10 Si AuB entonces $m(A, B) = x \leq y = M(A, B)$ por la Obs 4.5 y la Obs 3.1.

Obs 4.11 Si $A, B \in [x]$ y $A \ncong B$ entonces $M(A, B) > x$ por Ax2. Si $\exists m(A, B)$ tal que $A \ncong B$ entonces $m(A, B) < x$ (Pues $M = 2x - m > x \Rightarrow x - m > 0$).

Obs 4.12 Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, se tiene que $m(A, B) = m(B, A)$ y que
$M(A, B) = M(B, A)$ directamente de la definición 8.

Propiedades

Si $x, y \in \mathbb{Z}$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 13. *Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ se tiene que :*
a) Si $\exists m(A, B)$ entonces $(\exists D \in [m(A, B)])(DuA \wedge DuB)$
b) $(\exists C \in [M(A, B)])(AuC \wedge BuC)$
c) Si $(\exists z \in \mathbb{Z})(\exists D \in [z])(DuA \wedge DuB)$, entonces $\exists m(A, B)$

Demostración. Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ tenemos:

a) Si $\exists m(A, B)$ entonces existe $max\{z \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_z \neq \emptyset\}$ por Definición 8.
Por tanto $u_*(A, B)_{m(A,B)} \neq \emptyset$, con $u_*(A, B)_{m(A,B)} \subset [m(A, B)]$ por Obs 4.3
Así $(\exists D \in [m(A, B)])(D \in u_*(A, B)_{m(A,B)})$
Por tanto $(\exists D \in [m(A, B)])(DuA \wedge DuB)$ por Definición 7.

b) Por Ax2 $\exists M(A, B)$
entonces existe $min\{w \in \mathbb{Z} : u^*(A, B)_w \neq \emptyset\}$ por Definición 8
Por tanto $u^*(A, B)_{M(A,B)} \neq \emptyset$, con $u^*(A, B)_{M(A,B)} \subset [M(A, B)]$ por Obs 4.3
Así $(\exists C \in [M(A, B)])(C \in u^*(A, B)_{M(A,B)})$
Por tanto $(\exists C \in [M(A, B)])(AuC \wedge BuC)$ por Definición 7.

c) Si $(\exists z \in \mathbb{Z})(\exists D \in [z])(DuA \wedge DuB)$, entonces $(\exists D \in [z])(D \in u_*(A, B)_z)$, así $u^*(A, B)_z \neq \emptyset$ por Definición 7.
Luego $\{w \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_w \neq \emptyset\} \neq \emptyset$, donde $(\forall w \in \mathbb{Z})(w \leq \{x, y\})$ por Obs 4.2
Siempre se puede tomar el máximo de un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente, por consiguiente existe $max\{w \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_w \neq \emptyset\}$
Por tanto $\exists m(A, B)$ por Definición 8. □

Proposición 14. *Si $A, B \in [x]$ y $\exists m(A, B)$ con $m(A, B) = x$ entonces $A \cong B$* [22].

Demostración. Si $A, B \in [x]$ y $\exists m(A, B)$, con $m(A, B) = x$
Por tanto $(\exists D \in [x])(DuA \wedge DuB)$, sin embargo, por la Proposición 8.c, tenemos que $D \cong A$ y $D \cong B$, por tanto $A \cong B$. □

Proposición 15. *Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ con AuB y además $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ con $z \geq \{x, y\}$ tenemos que:*
a)Si existe $m(A, C)$, entonces existe $m(B, C)$ y $m(A, C) \leq m(B, C)$
b)$M(A, C) \leq M(B, C)$

Demostración. Sean $A \in [x]$, $B \in [y]$ y AuB, además $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ con $z \geq \{x, y\}$

a) Si existe $m(A, C)$ entonces $(\exists D \in [m(A, C)])(DuA \wedge DuC)$ y como AuB, se sigue que DuB por Proposición 10.c
Así: $(\exists D \in [m(A, C)])(DuB \wedge DuC)$, luego $D \in u_*(B, C)_{m(A,C)}$
Por definición 8 de $m(B, C)$ y como $u_*(B, C)_{m(A,C)} \neq \emptyset$,
se sigue que $m(A, C) \leq m(B, C)$.

b) $(\exists E \in [M(B, C)])(BuE \wedge CuE)$ por la Obs 4.4
como AuB, se sigue que AuE por Proposición 10.c
Así: $(\exists E \in [M(B, C)])(AuE \wedge CuE)$, luego $E \in u^*(A, C)_{M(B,C)}$
Por definición 8 de $M(A, C)$ y como $u^*(A, C)_{M(B,C)} \neq \emptyset$,
se sigue que $M(A, C) \leq M(B, C)$. □

Proposición 16. *Si $A, B \in [x]$, con $A \cong B$ y sea cualquier $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ tenemos:*
a) $m(A, C) = m(B, C)$ si existen
b) $M(A, C) = M(B, C)$

Demostración. Sean $A, B \in [x]$, con $A \cong B$, además sea $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$

a) Sea $w = min\{x, z\}$ entonces $(\forall y \in \mathbb{Z}, y \leq w)(\forall D \in [y])(DuA \Leftrightarrow DuB)$, aplicando dos veces la Proposición 9.b.
Luego $(\forall y \in \mathbb{Z}, y \leq w)(u_*(A, C)_y = u_*(B, C)_y)$ por Definición 7.

[22] De donde $A \ncong B \Rightarrow m(A, B) < x$

Así, tenemos que $u_*(A, C)_y, u_*(B, C)_y$ son ambos vacíos o ninguno es vacío, de donde, por la Definición 8 se cumple solo una de las siguientes afirmaciones:
i) $(\exists m(A, C))(\exists m(B, C))(m(A, C) = m(B, C))$
ii) $(\nexists m(A, C)) \wedge (\nexists m(B, C))$

b) Sea $w = max\{x, z\}$ entonces
$(\forall y \in \mathbb{Z}, y \geq w)(\forall E \in [y])(AuE \Leftrightarrow BuE)$, aplicando dos veces la Proposición 9.a.
Luego $(\forall y \in \mathbb{Z}, y \geq w)(u^*(A, C)_y = u^*(B, C)_y)$ por Definición 7.
Por la Definición 8 tenemos $M(A, C) = M(B, C)$. □

5. Axiomas de unicidad

En la presente sección se postulan los dos axiomas de unicidad que permiten un comportamiento regular y esperado en el conglomerado de los $\mathbb{Z}$-espacios, limitando la incidencia a elementos definidos de $\mathbb{Z}$-espacios y permitiendo la definición de los operadores $\uparrow$ y $\downarrow$, junto con varias propiedades y observaciones.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

Axioma 3 (Ax3). *Sean $A \in [x]$, $B \in [y]$:*

a) Si $\exists m(A, B)$ entonces se cumple:
$(\exists D \in [m(A, B)])(\forall C \in [z])(CuA \wedge CuB \Rightarrow CuD)$ donde $z \leq m(A, B)$

b) $(\exists E \in [M(A, B)])(\forall C \in [z])(AuC \wedge BuC \Rightarrow EuC)$ donde $M(A, B) \leq z$

Proposición 17. *Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, considerando la terminología de Ax3:*

a) Si $\exists m(A, B)$, con $(\exists D' \in [m(A, B)])(D'uA \wedge D'uB)$ entonces $D \cong D'$

b) Si $(\exists E' \in [M(A, B)])(AuE' \wedge BuE')$ entonces $E \cong E'$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, considerando la terminología de Ax3:

a) Supongamos $\exists m(A, B)$, si $(\exists D' \in [m(A, B)])(D'uA \wedge D'uB)$
Aplicando Ax3.a y como $m(A, B) \leq m(A, B)$, entonces tenemos $D'uD$
Por tanto $D \cong D'$ por la Proposición 8.c ya que $[D']^{-1} = [D]^{-1}$

b) Supongamos $(\exists E' \in [M(A, B)])(AuE' \wedge BuE')$
Aplicando Ax3.b y como $M(A, B) \leq M(A, B)$, entonces tenemos EuE'
Por tanto $E \cong E'$ por la Proposición 8.c ya que $[E']^{-1} = [E]^{-1}$ □

Definición 9. Sean $A \in [x]$, $B \in [y]$:

a) Si $\exists m(A, B)$, por Ax 3.a y Proposición 17.a, existe un único $D \in [m(A, B)]$ tal que $DuA \wedge DuB$. Denominamos $A \downarrow B$ a este único D [34].

b) Por Ax 3.b y Proposición 17.b, existe un único $E \in [M(A, B)]$ tal que $AuE \wedge BuE$. Denominamos $A \uparrow B$ a este único E [35].

Observaciones y Comentarios

Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, tenemos:

Obs 5.1 Los conjuntos cociente $(u_*(A, B)_{m(A,B)})/\cong$ y $(u^*(A, B)_{M(A,B)})/\cong$ tienen cardinalidad 1 por Proposición 17.a. y 17.b. [36]

Obs 5.2 Por Obs 4.4 siempre existe $M(A, B)$, por tanto Ax.3.b y $A \uparrow B$ están bien definidas.

Obs 5.3 $A \uparrow B$ tiene sentido solamente si $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$.

Obs 5.4 $A \downarrow B$ tiene sentido solamente si $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$ y $\exists m(A, B)$

Obs 5.5 Por la Proposición 13.c y la Obs 5.4, se tiene que $A \downarrow B$ tiene sentido si existen $z \in \mathbb{Z}$ y $D \in [z]$ tales que $DuA \wedge DuB$. [37]

Obs 5.6 $(A \uparrow B) \in [M(A, B)]$, $(A \downarrow B) \in [m(A, B)]$ por Definición 8 de $\uparrow$ y $\downarrow$

Obs 5.7 Si $\exists m(A, B)$ y $\exists D \in [m(A, B)]$ tales que DuA, DuB, entonces $D \cong (A \downarrow B)$ por definición 9 de $\downarrow$.

Obs 5.8 Si $\exists E \in [M(A, B)]$ tales que AuE, BuE, entonces $E \cong (A \uparrow B)$ por definición 9 de $\uparrow$.

Propiedades

Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 18. *a) $(A \uparrow A) \cong A$*
b) $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$
c) $AuB \Rightarrow (A \uparrow B) \cong B$
d) $(A \uparrow B) \cong (B \uparrow A)$
e) $A \cong B \Rightarrow (A \uparrow B) \cong A$

Demostración. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$:

a) Por definición de $\uparrow$, $(A \uparrow A) \in [x]$ tal que $Au(A \uparrow A)$
De donde, por Proposición 8.c se tiene $(A \uparrow A) \cong A$

b) Por definición 9 de $\uparrow$, $(A \uparrow B) \in [M(A, B)]$, tal que $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$

c) Si AuB entonces $M(A, B) = y$ por Obs 4.10, así existen $(A \uparrow B), B \in [M(A, B)]$ tales que $Bu(A \uparrow B)$ y BuB, por la Proposición 18.b
Por la unicidad en la Proposición 17.b, $(A \uparrow B) \cong B$

[34] Se aclara que es único salvo $\cong$-equivalencia

[35] Se aclara que es único salvo $\cong$-equivalencia

[36] La Obs 5.1 es equivalente a Ax3

[37] Obviamente considerando que $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$ con $z \leq \{x, y\}$.

d) Por definición 9 de $B \uparrow A$, es el único E respecto a $\cong$ tal que $E \in [M(A, B)]$ con AuE y BuE, como $M(A, B) = M(B, A)$ por la Obs 4.12 y por la unicidad se tiene: $(A \uparrow B) \cong (B \uparrow A)$

e) Si $A \cong B$ entonces AuB por la Proposición 8.b
Así, $(A \uparrow B) \cong B$ por Proposición 18.c. y $A \cong B$, entonces $(A \uparrow B) \cong A$

□

Proposición 19. *Si $\exists m(A, B)$, entonces se tiene lo siguiente:*
a) $(A \downarrow A) \cong A$
b) $(A \downarrow B)uA$ y $(A \downarrow B)uB$
c) $AuB \Rightarrow (A \downarrow B) \cong A$
d) $A \downarrow B \cong B \downarrow A$
e) $A \cong B \Rightarrow (A \downarrow B) \cong B$

Demostración. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, tales que $\exists m(A, B)$, tenemos:

a) Por definición 9 de $\downarrow$, $(A \downarrow A) \in [x]$ tal que $(A \downarrow A)uA$
De donde, por Proposición 8.c se tiene $A \downarrow A \cong A$

b) Por definición 9 de $\downarrow$, $(A \downarrow B) \in [m(A, B)]$, tal que $(A \downarrow B)uA$ y $(A \downarrow B)uB$

c) Si AuB entonces $m(A, B) = x$ por Obs 4.10, así existen $(A \downarrow B), A \in [m(A, B)]$ tales que $(A \downarrow B)uA$, $(A \downarrow B)uB$ y AuA por la Proposición 19.b
Por la unicidad en la Proposición 17.a, $(A \downarrow B) \cong A$

d) Por definición 9 de $B \downarrow A$ es el único D respecto a $\cong$ tal que $D \in [m(B, A)]$ con DuA y DuB, como $m(A, B) = m(B, A)$ por la Obs 4.12 y por la unicidad se tiene: $(A \downarrow B) \cong (B \downarrow A)$

e) Si $A \cong B$ entonces AuB por la Proposición 8.b
Así, $(A \downarrow B) \cong A$ por Proposición 19.c y $A \cong B$ entonces $(A \downarrow B) \cong B$. □

Proposición 20. *Si $z \in \mathbb{Z}$ tal que, $A, B \in [x]$, $C \in [z]$ y $A \cong B$ entonces:*

a) Si $\exists m(A, C)$ y $\exists m(B, C)$ entonces $(A \downarrow C) \cong (B \downarrow C)$

b) $(A \uparrow C) \cong (B \uparrow C)$.

Demostración. Si $z \in \mathbb{Z}$ tal que $A, B \in [x]$, $C \in [z]$ y $A \cong B$:

a) Si $\exists m(A, C)$ y $\exists m(B, C)$ entonces se cumple que $m(A, C) = m(B, C)$ por Proposición 16.a.
Por definición 9 $A \downarrow C$ es el único D respecto a $\cong$, tal que $D \in [m(A, C)]$ con DuA y DuC
Como $A \cong B$, entonces se cumple que $D \in [m(B, C)]$ tal que DuB y DuC por Proposición 9.b.
Por la unicidad en la Proposición 17.a, tenemos $D \cong (B \downarrow C)$
Por tanto $(A \downarrow C) \cong (B \downarrow C)$

b) Se cumple que $M(A, C) = M(B, C)$ por Proposición 16.b.
Por definición 9 $A \uparrow C$ es el único E respecto a $\cong$, tal que $E \in [M(A, C)]$ con AuE y CuE,
Como $A \cong B$, entonces se cumple que $E \in [M(B, C)]$ tal que BuE y CuE por Proposición 9.a.
Por la unicidad en la Proposición 17.b, tenemos $E \cong (B \uparrow C)$
Por tanto $(A \uparrow C) \cong (B \uparrow C)$ □

6. Axiomas de construcción

En la presente sección, se plantearán dos axiomas, para el uso adecuado de los operadores $\uparrow$ y $\downarrow$, permitiendo la construcción de nuevos elementos de $\mathbb{Z}$-espacios, en el marco de un comportamiento también adecuado del conglomerado.

Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$:

Axioma 4 (Ax4)**.** *Sean $x < y$, con $A \in [x]$ y $B \in [y]$ tales que AuB:*

a) $(\forall z < y)(\exists C \in [z])(B \cong (A \uparrow C))$

b) $(\forall w > x)(\exists D \in [w])(A \cong (B \downarrow D))$

Observaciones

Obs 6.1 Conforme la terminología de Ax4.a tenemos que CuB, por Proposición 18.b

Obs 6.2 Conforme la terminología de Ax4.b tenemos que AuD, por Proposición 19.b

Obs 6.3 Conforme la terminología de Ax4, no se puede dar que cada uno de los siguientes tres conjuntos $\{A, B\}$, $\{C, B\}$ o $\{D, A\}$ sean subconjuntos de un solo $\mathbb{Z}$-espacio.

Obs 6.4 Ax4 está bien establecido, debido a que los $\mathbb{Z}$-espacios no son vacíos y a que cada uno de estos tiene al menos dos elementos no congruentes por Proposición 4.b.

Obs 6.5 Ax4 *no implica* que dados cualquiera $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$ y $B \in [y]$ exista $m(A, B)$

Obs 6.6 El Ax4.b, implica que $\exists m(B, D)$, conforme la terminología de este Axioma.

Propiedades

Proposición 21. *Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$ con $x < y$ y AuB, entonces*

a) $(\exists C \in [x])(B \cong (A \uparrow C) \land A \ncong C)$

b) $(\exists D \in [y])(A \cong (B \downarrow D) \land B \ncong D)$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$ con $x < y$ y AuB, entonces

a) Por Ax4.a $(\exists C \in [x])(B \cong (A \uparrow C))$
Si suponemos $A \cong C$, entonces, por Proposición 18.e $(A \uparrow C) \cong A$, de donde $A \cong B$ por Proposición 5. Esto implica que $x = y$, que es contradictorio.
Por tanto $A \ncong C$

b) Por Ax4.b $(\exists D \in [y])(A \cong (B \downarrow D))$
Si suponemos $B \cong D$, entonces, por Proposición 19.e $(B \downarrow D) \cong B$, de donde $B \cong A$ por Proposición 5. Esto implica que $x = y$, que es contradictorio.
Por tanto $B \ncong D$ □

Proposición 22. *Para cualquiera $x, y \in \mathbb{Z}$, dado $A \in [x]$ existe $B \in [y]$ tal que $\exists m(A, B)$*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, además, sea $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < \{x, y\}$.
Por Proposición 11.b, existe $C \in [z]$ tal que CuA
Luego, por Ax4.b, como $y > z$ existe $B \in [y]$ tal que $C \cong (A \downarrow B)$
Por tanto $\exists m(A, B)$ por Obs 5.4. [38] □

7. Ejemplo de aplicación

Como un ejemplo concreto de la axiomática indicada, obtendremos los términos primitivos y los axiomas de Incidencia del sistema de Hilbert:

- Se define la noción primitiva de *Punto* como un elemento de [0].
- Se define la noción primitiva de *Recta* como un elemento de [1].
- Se define la noción primitiva de *Plano* como un elemento de [2]
- Se define la relación primitiva "*yace en*"como la relación $t \in ([0] \times [1]) \cup ([1] \times [2])$, conforme lo señalado previamente.

Axiomas de Hilbert:
Tomando en cuenta que se trata de un espacio tridimensional, es decir que no se consideran objetos en [4], los axiomas de Incidencia de Hilbert se pueden expresar de la siguiente manera:

1. Dos puntos distintos A y B determinan una única recta R.
2. Dos puntos cualquiera de una recta la determinan por completo, es decir si A y B determinan R, además A y C también determinan R con B distinto de C entonces B y C determinan R.
3. Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano α.
4. Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano K por completo, es decir, si A, B, D también determinan K tales que A, B, D no están en la misma recta y C es distinto de D, entonces A, C, D determinan K.
5. Si dos puntos A y B de la recta R yacen en el plano K entonces toda la recta R yace en el plano K
6. Si dos planos K y L tienen un punto A en común, entonces tienen al menos otro punto B en común.
7. En cada recta R hay al menos dos puntos A y B, en cada plano K hay al menos tres puntos A, B, C que no están en la misma recta
8. Existen al menos cuatro puntos A, B, C, D no situados en un mismo plano.

[38] Se observa que Obs. 6.5 y Proposición 22 no se contradicen.

Nociones previas:
Si tomamos los "puntos": $A, B, C, D \in [0]$, las "rectas": $R, S \in [1]$ y los "planos": $K, L \in [2]$, debemos reformular lo establecido por los axiomas con la terminología del presente documento.

Lo primero que se debe notar es que no existen las nociones de $\mathbb{Z}$-espacios diferentes de [0], [1], [2] y [3] en los axiomas de Hilbert, por tanto especificaremos primero las siguientes nociones:

a. *Puntos Distintos*, esta noción podría significar solamente que $A \ncong B$, sin embargo en el contexto debemos interpretar adicionalmente si existe o no $m(A, B)$, ya que todos los $\mathbb{Z}$-espacios pueden tener o no tener $\mathbb{Z}$-espacios contenidos comunes (Entendemos "$\mathbb{Z}$-espacios contenidos"como $\mathbb{Z}$-espacios que están en relación t o u con otro, por la izquierda [39]).
Además se aclara que cuando $\exists m(A, B)$, se interpreta que $m(A, B) = -1$, con base en el Ax 2.a.

b. *Única Recta*, interpretamos la unicidad de cualquier $\mathbb{Z}$-espacio definida por la equivalencia $\cong$.

c. *Puntos Determinan una Recta*, esta noción se interpreta como $(A \uparrow B) \in [1]$, lo que implica que A y B son puntos distintos (conforme lo mencionado en el punto a inmediatamente arriba).

d. *Punto en una Recta*, las nociones de "estar en", "yacer en", "pertenecer a", o similares se interpretan como t en AtR cuando se trata de $\mathbb{Z}$-espacios adyacentes ($[x]$ es *adyacente* a $[y]$ si $|x - y| = 1$) o también se interpretan como u en AuK cuando se trata de $\mathbb{Z}$-espacios no adyacentes.

d. *Determinan un plano*, esta noción se interpreta para Puntos cuando AuK, BuK, CuK son distintos, con $(A \uparrow B) \ncong (A \uparrow C)$, tal que $K \cong [(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)]$. Se observa que dos rectas R y S determinan un plano cuando son diferentes. [40]

e. *No en la misma recta:* Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, se entiende como $\exists m((A \uparrow B), (A \uparrow C))$

f. *Dos planos tienen un punto en común:* Dos planos K, L tienen un punto en común, se interpreta bajo la limitación de que el máximo $z \in \mathbb{Z}$ que podemos tomar es 3.

Demostración de los Axiomas de Hilbert:
Ahora contamos con las herramientas para ejemplificar los conceptos de $\mathbb{Z}$-espacios en la axiomática de Hilbert, pasemos a demostrar cada axioma:

[39] "A está en relación u por la izquierda con R"si AuR
[40] R y S son diferentes si $R \ncong S$ considerando si existe o no existe $m(R, S)$ y la restricción a los $\mathbb{Z}$-espacios [0], [1], [2], [3]

Ejemplo 1 (Axioma 1 de Hilbert)**.** Si $A, B \in [0]$ tales que A y B son distintos, entonces $(\exists! R \in [1])(AtR \wedge BtR)$, donde R es $(A \uparrow B)$, los puntos A y B determinan la única recta R.

Demostración. Si $A, B \in [0]$ tal que $A \not\cong B$ tenemos las siguientes posibilidades conforme la noción de "Puntos Distintos ":

1ª Si $\nexists m(A, B)$, así $M(A, B) = 0 + 1 = 1$ conforme Ax 2.b.

2ª Si $\exists m(A, B)$, $m(A, B) = -1$, entonces $M(A, B) = 0+0-(-1) = 1$, conforme Ax 2.a.

En ambos casos $\exists!(A \uparrow B)$ tal que $(A \uparrow B) \in [1]$
Si llamamos R a $A \uparrow B$, tenemos AuR y BuR (específicamente AtR y BtR). □

Ejemplo 2 (Axioma 2 de Hilbert)**.** Si $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AtR, BtR, CtR, con $R \cong (A \uparrow B)$ y $R \cong (A \uparrow C)$ entonces $(B \uparrow C) \cong R$.

Demostración. Si $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AtR, BtR, CtR y $R \in [1]$
con $R \cong (A \uparrow B)$ y $R \cong (A \uparrow C)$, como B y C son distintos, $B \not\cong C$ y:

a) Si $\nexists m(B, C)$, así $M(B, C) = 0 + 1 = 1$ conforme Ax 2.b.

b) Si $m(B, C) = -1$, entonces $M(B, C) = 0+0-(-1) = 1$, conforme Ax 2.a.

En ambos casos $\exists!(B \uparrow C)$ tal que $(B \uparrow C) \in [1]$
Como $(B \uparrow C)$ es único en $[1]$, tal que $Bu(B \uparrow C)$ y $Cu(B \uparrow C)$, además $R \in [1]$ tal que BuR y CuR (por Proposición 9.b).
Tenemos que $R \cong (B \uparrow C)$ por la Proposición 17.b. □

Ejemplo 3 (Axioma 3 de Hilbert)**.** Sean $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AuK, BuK, CuK y $(A \uparrow B) \not\cong (A \uparrow C)$ entonces $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$

Demostración. Sean $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AuK, BuK, CuK
y $(A \uparrow B) \not\cong (A \uparrow C)$,
sabemos que $(A \uparrow B), (A \uparrow C) \in [1]$, pues $A, B, C \in [0]$ son distintos entre sí.
Como $Au(A \uparrow B)$ y $Au(A \uparrow C)$, entonces $\exists m((A \uparrow B), (A \uparrow C))$ por Proposición 13.c
y $m((A \uparrow B), (A \uparrow C)) = 0$ por Obs 4.6 y Proposición 14. Así $M((A \uparrow B), (A \uparrow C)) = 1 + 1 - 0 = 2$ por Ax 2.a
En Ax 3.b, complementado con la Proposición 17.b y la Definición 9.b habíamos caracterizado $(A \uparrow B)$, de la siguiente manera, tomando en cuenta que $M[A, B] = 1$ y que $K \in [2]$:
$(\exists(A \uparrow B) \in [1])(\forall C \in [z])(Au(A \uparrow B) \wedge Bu(A \uparrow B) \Rightarrow (A \uparrow B)uC)$, donde $M(A, B) \leq z$
Tomando $K \in [2]$ como uno de los C, y sabiendo que $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$, por Proposición 18.b
concluimos que $(A \uparrow B)uK$ por Ax 3.b.
Seguimos el mismo razonamiento para concluir que $(A \uparrow C)uK$.
Así tenemos que $K, ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)) \in [2]$ tales que $(A \uparrow B)$ y $(A \uparrow C)$ están en relación u por la izquierda con K y con $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$
Por la proposición 17.b tenemos que $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$ □

Ejemplo 4 (Axioma 4 de Hilbert)**.** Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano K por completo, es decir, si A, B, D también determinan K tales que A, B, D no están en la misma recta y C es distinto de D, entonces A, C, D determinan K.

Demostración. Los tres puntos A, B, C diferentes, no situados en la misma recta, determinan el plano $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$, conforme se vio en la prueba del Axioma 3 de Hilbert. Llamemos K a $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$
Si $D \in [0]$ diferente de A, B, C, con DuK y tal que A, B, D no están en la misma recta.
Suponemos que $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow D))$
Como AuK, CuK, además $(A \uparrow C) \in [1]$
Tenemos que $(A \uparrow C)uK$ por Ax3.b
Además como CuK, DuK, $(C \uparrow D) \in [1]$, por el Axioma 1 de Hilbert, ya que son diferentes.
Tenemos que $(C \uparrow D)uK$ por Ax3.b
Por otra parte, $\exists m((A \uparrow C), (C \uparrow D))$ con $m((A \uparrow C), (C \uparrow D)) = 0$, pues $Cu(A \uparrow C)$ y $Cu(C \uparrow D)$, por Obs 4.6 y Proposición 14.
Por tanto $M((A \uparrow C), (C \uparrow D)) = 1 + 1 - 0 = 2$ y $(A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D) \in [2]$ por Ax2.a y Definición 9 de $\uparrow$.
Hemos visto que $(A \uparrow C)uK$ y que $(C \uparrow C)uK$ por definición de K y de $\uparrow$.
Además, como $K, ((A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D)) \in [2]$
tenemos que $K \cong ((A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D))$ por Proposición 17.b. □

Ejemplo 5 (Axioma 5 de Hilbert)**.** Si dos puntos A y B de la recta R yacen en el plano K entonces toda la recta R yace en el plano K.

Demostración. Sean $A, B \in [0]$, tales que AtR, BtR, con RtK, $R \in [1]$ y $K \in [2]$[41]
Por otra parte estamos suponiendo que AuK, BuK.
Por definición de $\uparrow$, aplicando Ax3.b con $(A \uparrow B)$ como E y K como C, resulta:
$(A \uparrow B)uK$, ya que $M[A, B] = 1$.
Finalmente $(A \uparrow B)tK$ pues $K \in [2]$ por definición 5 de u. □

Ejemplo 6 (Axioma 6 de Hilbert)**.** Si dos planos K y L tienen un punto A en común, entonces tienen al menos otro punto B en común.

Demostración. Conforme la interpretación de "dos planos tienen un punto en común"(el mayor $z \in \mathbb{Z}$ es 3 para un $\mathbb{Z}$-espacio), tomemos los planos $K, L \in [2]$, tales que $A \in [0]$ es tal que AuK, AuL. De estas suposiciones, tenemos que $\exists m(K, L), m(K, L) \geq 0$ por Obs 4.5.
Con base en el Ax.2.a, tenemos $M(K, L) = 2 + 2 - m(K, L)$, por

[41] Se hicieron correcciones en este punto gracias a Amanda Iglesias.

tanto $m(K, L) > 0$, caso contrario $M(K, L) = 4$, que contradice la interpretación mencionada. Solo queda que $m(K, L) = 2$ o que $m(K, L) = 1$

Caso 1 Si suponemos $m(K, L) = 2$,
entonces por la Proposición 14, $K \cong L$
Por definición 5 de u, como AuK, tenemos que $\exists R \in [1]$ tal que AtR y RtK
Como AtR con $[A]^{-1} < [R]^{-1}$, por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow B)$ y $A \ncong B$.
De aquí tenemos que BtR por Obs 6.1 y así BuK y BuL por definición 5 de u, tal que $A \ncong B$.

Caso 2 Si suponemos $m(K, L) = 1$,
entonces por la proposición 13.a, $(\exists R \in [1])(RuK \wedge RuL)$, por tanto RtK, RtL, por definición 5 de u.
Por D1, tenemos que $\exists C \in [0]$ tal que CtR y por tanto CuK y CuL por definición 5 de u.

Caso 2.1 Si $A \ncong C$
entonces se cumple el requerimiento tomando $B = C$.

Caso 2.2 Si $A \cong C$,
entonces AtR por Proposición 4.a, además como $[A]^{-1} < [R]^{-1}$, por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow B)$ y $A \ncong B$.
De aquí tenemos que BtR por Obs 6.1 y así BuK y BuL por definición de u, tal que $A \ncong B$. □

Ejemplo 7 (Axioma 7 de Hilbert)**.**

En cada recta R hay al menos dos puntos diferentes A y B, en cada plano K hay a menos tres puntos diferentes A, B, C que no están en la misma recta.

Demostración.

En la recta: Por D1 de la definición 1, existe $A \in [0]$ tal que AtR
por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $A \ncong B$, con $R \cong (A \uparrow B)$.
De aquí AtR y BtR.

En el plano: Por D1 de la definición 1, tenemos que existe $R \in [1]$ tal que RtK
por Proposición 21.a, tenemos que existe $S \in [1]$ tal que $S \ncong R$, con $K \cong (R \uparrow S)$.
Como $R \ncong S$, existe $A \in [0]$ tal que $AtR \wedge AtS$, por definición de $\ncong$
Asimismo, existe $B \in [0]$ tal que $BtS \wedge BtR$, por definición de $\ncong$
De donde AuK, BuK y $A \ncong B$

Caso 1 Si $\nexists m(R, S)$
Por Propiedad 21.a existe $C \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow C)$, con $C \ncong A$
De aquí CtR y CtK y $C \ncong B$ (pues BtR).

Caso 2 Si $\exists m(R, S)$
En este caso $m(R, S) = 0$ por la restricción mencionada de los $\mathbb{Z}$-espacios
Por tanto $\exists C \in [0]$ tal que CtR, CtS por la Proposición 13.a, luego CuK
Tenemos que $C \ncong A$ puesto que AtS y $C \ncong B$ puesto que BtR Finalmente $\exists A, B, C \in [0]$, diferentes entre sí, tales que AuK, BuK, CuK □

Ejemplo 8 (Axioma 8 de Hilbert)**.** Existen al menos cuatro puntos $A, B, C, D \in [0]$ no situados en un mismo plano.

Demostración. Supongamos $A, B, C \in [0]$ tales que $K = ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)) \in [2]$, y AuK, BuK, CuK.
Por D2 de la definición 1, existe $R \in [1]$ tal que RtK
Por D1 de la definición 1, existe $E \in [0]$ tal que EtR, tenemos los siguientes casos:

Caso 1 Si $E \not u K$
entonces existe $D = E \in [0]$ con $D \not u K$.

Caso 2 Si EuK, entonces:
Por Proposición 21.a, existe $D \in [0]$ tal que $D \ncong E$ y $R \cong (E \uparrow D)$
Si suponemos DuK entonces $(E \uparrow D)uK$ por definición 9 de $\uparrow$, de donde RuK por Proposición 12.
Luego RtK lo que contradice a (*).
Por tanto existe $D \in [0]$ tal que $D \not u K$. □

8. Relación p

En la presente sección, finalizando este primer documento, complementamos lo señalado hasta ahora con otra noción fundamental para la Geometría Euclidiana, el "*Paralelismo Fuerte*", expresado por la relación p, con sus propiedades correspondientes.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

Definición 10. Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, entonces
se denota ApB siempre y cuando $A \cong B \vee \nexists m(A, B)$ [42][43]

Observaciones y Comentarios

Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, tenemos:

Obs 8.1 La relación ApB solamente tiene sentido si existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $A \in [x]$, $B \in [y]$.

Obs 8.2 Si tenemos que ApB y $x \neq y$, entonces $A \ncong B$, por tanto $\nexists m(A, B)$.

[42] Se incluye la congruencia en la definición de p, para que se puedan hacer particiones de elementos en un $\mathbb{Z}$-espacio, siguiendo el libro Álgebra Geométrica de Artin.
[43] Se debe notar que este paralelismo es "fuerte"debido a que no existen $\mathbb{Z}$-espacios comunes a los de referencia.

Obs 8.3 Si ApB decimos que A *"es fuertemente paralela a" B*

Obs 8.4 Si ApB y $A \ncong B$ entonces no tiene sentido $A \downarrow B$.

Obs 8.5 La definición 10 de ApB es equivalente a $\exists m(A, B) \Rightarrow A \cong B$.

Axioma 5 (Ax5). [44] *Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$, con $x < y$ y $A \not\parallel B$, entonces:*

a) $(\exists C \in [y])(AuC \wedge CpB)$
b) Si $(\exists D \in [y])(AuD \wedge DpB)$ *entonces* $D \cong C$.

Propiedades

Si $x \in \mathbb{Z}$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 23. *Sean $A, B, C \in [x]$, tales que $A \cong B$ y ApC entonces BpC.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B, C \in [x]$, tales que $A \cong B$ y ApC, tenemos dos casos:

a) Si $A \cong C$
entonces $B \cong C$ por transitividad de $\cong$, así BpC

b) Si $\nexists m(A, C)$ (ya que ApC) (*)
Supongamos que $\exists m(B, C)$ entonces $\exists m(A, C)$ y $m(A, C) = m(B, C)$ por Proposición 16.a, esto contradice (*).
De donde $\nexists m(B, C)$, por tanto BpC. □

Proposición 24. *La relación p es de equivalencia en* $[x]$.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B, C \in [x]$:

a) $A \cong A$, entonces $A \cong A \vee \nexists m(A, A)$, entonces ApA.

b) Si ApB, entonces $A \cong B \vee \nexists m(A, B)$, entonces $B \cong A \vee \nexists m(B, A)$
Por tanto BpA

c) Si ApB y BpC, veamos la relación entre A y C:
Si $\nexists m(A, C)$ entonces por definición se cumple ApC.
Por otra parte si suponemos que $\exists m(A, C)$,
entonces $(\exists! D \in [m(A, C)])(DuA \wedge DuC)$ [45] por Proposición 17.a.
Así, como $m(A, B) = m(B, C) = m(A, C)$ en caso que existan, se dan los casos:
   i) Si $A \cong B$ entonces $(\exists D \in [m(A, C)])(DuB \wedge DuC)$ así $\exists m(B, C)$
   Luego $B \cong C$ porque BpC, por tanto ApC
   ii) Si $B \cong C$ entonces $(\exists D \in [m(B, C)])(DuA \wedge DuB)$ así $\exists m(A, B)$
   Luego $A \cong B$ porque ApB, por tanto ApC
   iii) Si $\nexists m(A, B) \wedge \nexists m(B, C)$ entonces $D \not\parallel B$ (Si DuB contradiría las suposiciones de no existencia, ya que DuA y DuC).

Por otra parte, si $A \cong C$ entonces ApC, así (por la nota en la Proposición 14) tenemos $m(A, C) < x$
Aplicando Ax 5.a para $D \in [m(A, C)]$ y $B \in [x]$, tenemos:
$(\exists! E \in [x])(DuE \wedge EpB)$, luego por Ax5.b $A \cong E \cong C$, de donde ApC. □

[44] El presente axioma determina la geometría del conglomerado como Euclidiana y el punto b es equivalente al quinto postulado de los *Elementos de Euclides*.
[45] La notación $\exists!$ significa existe un único respecto de $\cong$.

Referencias

[1] Emil Artin, Álgebra Geométrica, Princeton University, Editorial Limusa 1992, Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés por Interscience Publishers, Inc. New York con el título, GEOMETRIC ALGEBRA @1957, ISBN 0-471-60839-4.
[2] Euclides, Los Elementos de la Geometría, 300 AC, como referencia: http://www.claymath.org/euclids-elements
[3] David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1900, como referencia http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf.
[4] Alfred Tarski, artículo The Bulletin of Symbolic Logic Volume 5, Number 2, June 1999, como referencia: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.9012
[5] V.A., Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea https://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/ https://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/
[6] N.V.Efímov, Geometría Superior Ed. Mir
[7] P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma
[8] K.Gödel, Obras Completas, Ed. Alianza Universidad