Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 8–15

IIMAT

Corchete de Lie y Algebras de Lie☆,☆☆

Efrain Cruz[a,1,*]

[a] *Carrera de Matemática, Facultad Ciencias Puras y Naturales, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz-Bolivia.*

Resumen

Este trabajo se encuentra en el contexto de divulgación de conceptos importantes de la Teoría de Control Geométrico, iniciaremos con la descripción del concepto de Corchete de Lie a través de la derivada de Lie definida en el espacio lineal de campos de vectores de una variedad diferenciable, sobre el espacio de derivaciones definidas del espacio de funciones escalares de la variedad sobre el cuerpo de los reales. Esta derivada de Lie es un isomorfismo que nos permite dotar al espacio lineal de campos de vectores de la estructura de álgebra el cual se conoce con el nombre de Algebra de Lie. La extensión de la Condición de Controlabilidad de Kalman a la estructura de variedad diferenciable será realizada con los Corchetes de Lie y la búsqueda del subespacio de Lie más pequeño generado por los campos vectoriales que rigen el Sistema de Control Lineal definido en una variedad diferenciable.

Palabras clave: Variedades diferenciables, campo de vectores, derivaciones, álgebras de Lie, sistema de control lineal

1. Introducción

Considerando una variedad diferenciable M de clase C^∞ de dimensión n que en lo que sigue simplemente será denominada como variedad y su espacio tangente TM que es una variedad y un espacio lineal de dimensión $2n$ en el sentido que es lineal en cada fibra, la variedad TM es la unión disjunta de espacios tangentes T_pM con $p \in M$. Se tiene que los espacios tangentes están relacionados a vectores velocidad de curvas. Dadas las variedades M y N de dimensiones m y n respectivamente, considerando una aplicación entre variedades $f : M \to N$ diferenciable de clase C^∞ induce una aplicación entre sus espacios tangentes escrita como $Tf : TM \to TN$ que es lineal en el sentido que es lineal en cada fibra, ver detalles en [1], pág. 51-73; [2], pág. 41-61 y [3], pág. 5-21.

La relación fundamental será explícita con el concepto de campos vectoriales que es una aplicación $\mathbf{X} : M \to TM$ que a $p \in M$ le hace corresponder el vector tangente $X_p \in T_pM$, que serán descritas como entidades que relacionan los espacios tangentes con las variedades subyacentes, ver detalles en [1], pág. 106-121; [2], pág. 62-84 y [3], pág. 34-41.

El estudio de campos vectoriales de esta manera, es una opción moderna entre otras alternativas. En realidad tienen muchas conexiones con propiedades familiares. Una vez que se establece la definición y las propiedades fundamentales obtenidas directamente del concepto de campo vectorial, las propiedades procedentes con otras serán establecidas. Para obtener estas propiedades, se introduce la noción de 'derivación' (la operación de tomar derivadas), para otras presentaciones ver [1], pág. 176-185; [2], pág. 255-261 y [3], pág. 69-72.

Esta noción en principio es dada en forma abstracta, luego interpretada en términos del plano euclidiano. Algunas de sus propiedades serán obtenidas de manera explícita. Estas propiedades se relacionan con los de un campo vectorial, por considerar el conjunto de campos vectoriales sobre una variedad denotado por $\chi(M)$. Otra manera alternativa de estudiar las variedades es por considerar funciones diferenciables a valores reales $f : M \to \mathbb{R}$ y denotando al conjunto de todas estas funciones por $\mathfrak{F}(M)$ que con las operaciones de suma y multiplicación definidas de mane-

☆Artículo revisado por el Comité Editorial. El documento corresponde al Proyecto Dinámicas de Control 2017 - 2018.

☆☆En el marco teórico de la Teoría de Control Geométrico, es necesario sentar las bases teóricas en las cuales se aplica el concepto de álgebras de Lie en la controlabilidad de sistemas de control.

*✉ ecruz3@umsa.bo

[1] Artículo revisado por el Comité Editorial. El contenido es de divulgación que da las bases de la aplicación de la geometría diferencial en el problema de controlabilidad de sistenas de control.

ra natural forma un anillo, y con la multiplicación por escalares reales es un espacio vectorial, además se obtiene que $\chi(M)$ es un espacio vectorial sobre $\mathfrak{F}(M)$, para detalles ver [1], pág. 151-153; [2], pág. 78.

Una derivación sobre la variedad M es dada por una función $\theta : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ que es lineal y satisface la regla de Leibniz, es decir, que la función se comporta como la deriva en el producto de funciones, denotemos por $\mathfrak{D}(M)$ al conjunto de derivaciones sobre M, el cual es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *El espacio lineal de los campos vectoriales en M, $\chi(M)$ es isomorfo al espacio lineal de derivaciones en $\mathfrak{F}(M)$, $\mathfrak{D}(M)$.*

Para otra versión de este resultado ver [2], pág. 79. Finalmente, un hecho importante sobre los campos vectoriales es que no sólo forman un espacio lineal, sino también forman un álgebra. La última parte de este trabajo contiene una discusión de una regla de multiplicación (simbolizada por corchetes) denominado Corchete de Lie y algunas de sus propiedades que hacen de $\chi(M)$ un álgebra que procede del Corchete de Lie, denominada el álgebra de Lie, concluimos este trabajo como un ejemplo de álgebra de Lie que es usado en las ecuaciones lineales de estado en la Teoría de Control, sin embargo se debe destacar los Corchetes de Lie son la base de la Teoría de Control No Lineal que no es abordado en este escrito.

2. Campos Vectoriales

Sea M una variedad y $T(M)$ su espacio tangente. Un campo vectorial, $\mathbf{X}$, es una función entre variedades de M a TM tal que para cada $p \in M$, el campo vectorial en p es un elemento en el espacio tangente unido en p a la variedad M, la cual es denotada por $X(p) \in T_pM$.

Recordemos que cada punto t en la curva diferenciable $c(t)$ tiene un vector velocidad, la cual pertenece a una clase con vector tangente $c'(t)$ y que T_pM es el conjunto de clases de equivalencia de curvas a través del punto p en $t = 0$. Una buena elección de parametrización, es considerar a $c'(t)$ como el punto $\left(t, \dfrac{d}{dt}(t)\right)$ o $(t, 1)$. Consideremos la curva c en M con dominio I como una función entre variedades; a saber, $c : I \to M$. Sea $c'(t)$ la curva en T_pM: $c'(0) \in [c]_p$, donde $[c]_p$ es la clase de equivalencia en p. Como se muestra en la Figura 1, también existe una función inducida T_c entre el espacio tangente a I, $I \times \mathbb{R}$ y TM, esto es, $Tc : I \times \mathbb{R} \to TM$.

Las propiedades de conmutatividad mostradas en la Figura 1, indican que $c'(t)$ es la imagen del punto $(t, 1)$:

$$c'(t) = Tc(t, 1). \tag{1}$$

La definición de campos vectoriales dice que $c'(t)$ es la imagen de $c(t) \in M$ por el campo vectorial $\mathbf{X}$, la cual se escribe como

$$c'(t) = \mathbf{X}(c(t)). \tag{2}$$

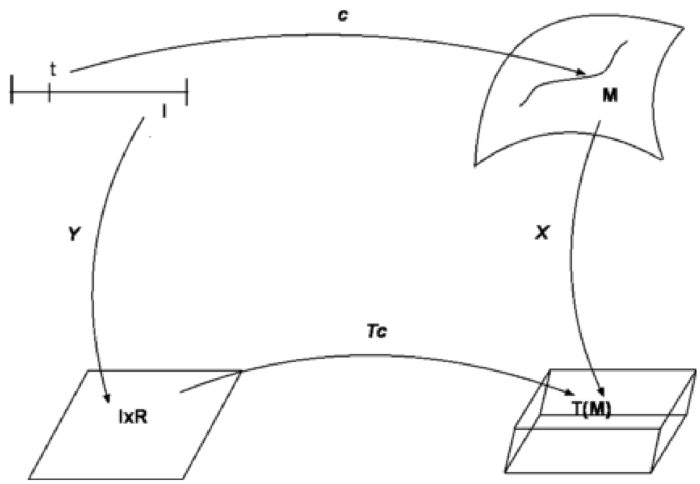

Figura 1. Aplicación tangente

Para establecer esta relación con más detalle, consideremos en coordenadas locales donde M puede tomarse como un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y su espacio tangente, $T(M)$, es un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La ecuación (1) da el vector tangente $c'(t)$ como:

$$\begin{aligned} c'(t) &= Tc(t, 1) \\ &= (c(t), Dc(t) \cdot 1) \\ &= \left(c(t), \frac{d}{dt}c(t)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, podemos escribir $\mathbf{X}(c(t))$ de la forma:

$$\mathbf{X}(c(t)) = (c(t), \widetilde{\mathbf{X}}(c(t)). \tag{4}$$

La comparación de las ecuaciones (2), (3) y (4) muestra que,

$$\frac{d}{dt}c(t) = \widetilde{\mathbf{X}}(c(t)). \tag{5}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales.

La ecuación (5) es importante. Proporciona una identificación conceptual de un punto móvil con una función de posición. De donde se deduce que lo importante de la definición de campos vectoriales radica en que la variedad es el lugar donde se localizan todas las condiciones iniciales de todas las curvas cuyos vectores tangentes están dados por la ecuación (5). Son las 'curvas integrales' de $\widetilde{\mathbf{X}}$.

Toda la teoría local de las ecuaciones diferenciales ordinarias se aplica al sistema de ecuaciones en (5). Su estudio en términos de variedades da lugar a algunos resultados globales. Un ejemplo de un resultado global viene dado por el siguiente teorema que se utilizará en una sección posterior.

Teorema 2.1. *Sea M una variedad compacta, **X** un campo vectorial sobre M y $c : I \to M$ una curva integral de **X**. Entonces el dominio de c puede extenderse a $\mathbb{R}$.*

Para la demostración consultar [2], pág. 84-86 y [3], pág. 37.

Una interpretación de este teorema, por ejemplo, es que no existe tiempo de escape finito para soluciones de ecuaciones diferenciales sobre variedades compactas, lo que significa que las soluciones se comportan bien en cualquier intervalo de tiempo finito.

3. Derivaciones

Una vez definido los campos vectoriales y demostrado que determinan el lado derecho de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos referimos al concepto de derivaciones que luego se mostrará que es equivalente a la de un campo vectorial. El concepto es útil también porque generalmente es más fácil realizar las derivaciones que calcular el vector velocidad directamente.

Sean M una variedad y $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de todas las funciones a valores reales que lleva M en $\mathbb{R}$. Puesto que cuando cualquiera de ellas se evalúa en un punto dado ellos son sólo números reales, se pueden sumar y multiplicar cualquiera dos funciones $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ puntualmente de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Puesto que los lados derechos son operaciones familiares sobre números reales, definen los símbolos de la izquierda. (Estas definiciones, junto con las definiciones sobre la multiplicación por constantes y propiedades asociativas, hacen que el conjunto de funciones reales $\mathfrak{F}(M)$ sea un 'álgebra'. Un enfoque alternativo a nuestro desarrollo de variedades utiliza anillos de funciones definidas en conjunto abierto en lugar de cartas porque conociendo $\mathfrak{F}(M)$ uno conoce M, para este concepto ver [1], pág. 178-182.)

Una derivación θ, en $\mathfrak{F}(M)$ se define como una función de $\mathfrak{F}(M)$ a $\mathfrak{F}(M)$, con las siguientes propiedades:

1. $\theta(cf) = c\theta(f), \quad c \in \mathbb{R}$.
2. $\theta(f+g) = \theta(f) + \theta(g)$.
3. $\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g)$.

Las propiedades 1. y 2. dicen que θ es una función lineal en $\mathfrak{F}(M)$. La propiedad 3. muestra que la operación no es lineal cuando el coeficiente de una función no es una constante sino otra función. Parece sospechosamente como la derivada habitual del producto de los funciones. No debería sorprendernos, pues estas tres propiedades que definen la operación de derivación, θ, abstraen la idea habitual de una derivada.

Las derivadas son operaciones de diferenciación que necesitan tres objetos especificados antes de dar un valor, por ejemplo, un número real. Necesitan una función para trabajar, un lugar donde los resultados pueden ser evaluados, y un encabezamiento lejos del punto de evaluación. La afirmación $\theta f(x)$, o $\theta(f)(x)$, da un número real. La función f y el punto de evaluación x, son explícitos. Sin embargo implícito en θ, están las nociones de los límites de la diferenciación y de la dirección de la diferenciación.

Ejemplo 1. Sea M el plano euclidiano: $M = \mathbb{R}^2$. Entonces tomemos $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ como el conjunto de todas las funciones de valor real con derivadas parciales continuas en todos los órdenes. Sea θ dada por:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces

$$\theta(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

y, por las reglas ordinarias del cálculo, se tiene

$$\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g).$$

Ejemplo 2. Un resultado más general de una derivación para una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ es

$$\alpha(f) = \alpha_1(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{7}$$

donde α_1 y α_2 también pertenecen a $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. La dirección de la diferenciación es (α_1, α_2). De hecho, toda derivación de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ tiene la forma de la ecuación (7), como se ve a partir de lo que sigue.

Consideremos una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. Entonces la ecuación

$$f(x,y) = f(a,b) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(a+t(x-a), b+t(y-b))dt$$

es una identidad. Se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \\ &\quad (x-a)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a+t(x-a), b+t(y-b))dt \\ &+ \quad (y-b)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a+t(x-a), b+t(y-b))dt. \end{aligned}$$

Para a y b fijos, esta fórmula se cumple para todo x e y. Siendo

$$g_1(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a+t(x-a), b+t(y-b))dt$$

y

$$g_2(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a+t(x-a), b+t(y-b))dt$$

podemos escribir

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)g_1(x,y) + (y-b)g_2(x,y). \tag{8}$$

Definimos dos funciones proyección:

$$p_1(x,y) = x \quad \text{y} \quad p_2(x,y) = y. \tag{9}$$

Entonces la ecuación (8) puede escribirse en notación de función como

$$f = f(a,b) + (p_1 - a)g_1 + (p_2 - b)g_2.$$

Aplicando una derivación arbitraria θ a f tenemos:

$$\begin{aligned}\theta(f) &= \theta(p_1 g_1) - a\theta(g_1) + \theta(p_2 g_2) - b\theta(g_2)\\ &= \theta(p_1)g_1 + p_1\theta(g_1) - a\theta(g_1) + \theta(p_2)g_2 \\ &\quad + p_2\theta(g_2) - b\theta(g_2)\end{aligned} \tag{10}$$

puesto que las propiedades 1. y 3. ofrecen la condición sobre las derivadas que $\theta(a) = \theta(b) = 0$. Evaluando la expresión (10) en el punto (a, b) se tiene

$$\begin{aligned}\theta(f)(a,b) &= \theta(p_1)(a,b)g_1(a,b) + a\theta(g_1)(a,b)\\ &\quad -a\theta(g_1)(a,b) + \theta(p_2)(a,b)g_2(a,b)\\ &\quad +b\theta(g_2)(a,b) - b\theta(g_2)(a,b)\\ &= \theta(p_1)(a,b)g_1(a,b) + \theta(p_2)(a,b)g_2(a,b).\end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$g_1(a,b) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dt = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\int_0^1 dt = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b),$$

similarmente

$$g_2(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Así, obtenemos

$$\theta = \theta(p_1)\frac{\partial}{\partial x} + \theta(p_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

que tiene la forma de la ecuación (7).

3.1. *Resultados a obtener y notaciones*

Se ha considerado una derivación denotado por θ. Será relacionada con un campo vectorial denotado por $\mathbf{X}$, a través de la aplicación denotada por $L_{\mathbf{X}}$, la cual se denominará la Derivada de Lie. Todos los conceptos se refieren a símbolos utilizados para elementos del espacio tangente. Estos términos serán vistos como un gradiente o una derivada direccional cuando se aplique a funciones reales en el espacio euclidiano ordinario. Esta notación básicamente se utiliza para enfatizar diferentes aspectos del mismo conjunto de objetos, para detalles ver [1], pág. 154-156 y [3], pág. 69-70.

Las dificultades en la comprensión de la notación comienzan con las expresiones para los espacios tangentes. Un único espacio tangente T_pM, es un espacio vectorial lineal unido a un punto particular p de la variedad M. La cual esta dotada de la estructura de los espacios producto, esto es $M \times \mathbb{R}^n$ (en el sentido local, es decir, para un abierto U de M lo que identificamos es $U \times \mathbb{R}^n$); que tiene la siguiente descripción, un vector tangente puede ser escrito como el par (p, x), con $p \in M$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Todas las operaciones vectoriales se realizan en la segunda componente, pero solo tienen sentido si se realizan en el mismo punto del espacio, es decir, $(p, x) + (p, y) = (p, x + y)$. Siempre que se discutan operaciones vectoriales de vectores tangentes, se supone que los objetos de la operación residen en el mismo punto de la variedad, incluso este requisito no es invertido explícitamente. Lo que nos lleva a la conclusión de que no se definen de otra manera, ver [1], pág. 107; [2], pág. 68-74 y [3], pág. 12.

La expresión explícita para el término en $\mathbb{R}^n$ se escribe como $c'(0)$, $(f \circ c(0))'$, $f'(0)c'(0)$ y así sucesivamente, dependiendo de las circunstancias de estudio. Estríctamente, estas expresiones se refieren a la velocidad de la curva en un punto de la variedad, que es equivalente a un vector tangente en el espacio tangente, una distinción no siempre considerada de manera clara.

Los aspectos de velocidad de estos términos, que se refiere a su generación en una curva sobre la variedad, no siempre pueden ser significativos; la tangente que se encuentra en $\mathbb{R}^n$ lo es. En este caso se denota como Df cuando se quiere encontrar algo genérico, se puede considerar en la forma $df(m)(m, x)$ enviando un elemento (m, x) de un espacio tangente a otro; esta forma enfatiza los aspectos del operador lineal de $df(m)$. Si la variedad original es un espacio euclidiano, entonces $df(m)(m, x)$ se escribe explícitamente como $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(m), x_i\right)$ donde los paréntesis externos y la coma denotan un producto interno. Esto también puede parecer como $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(m), \alpha^i\right)$, donde su conexión con la forma general de $\theta f = \alpha^i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ es clara. Es también la forma general para una derivada direccional. La misma forma representa $\mathbf{X}(f)$ bajo estas condiciones. Es también la forma que toma una derivada de Lie cuando opera sobre una función escalar.

4. El isomorfismo

Con los comentarios anteriores intuitivamente se admite que los campos vectoriales y las derivaciones son sólo lados diferentes de la misma moneda. Su identificación entre sí es formalizada por un isomorfismo como espacios vectoriales o lineales. Se demostrará que cada campo vectorial de una variedad M da lugar a una única derivación de $\mathfrak{F}(M)$ (en adelante consideramos a $\mathfrak{F}(M)$ como el álgebra de funciones con derivadas de todos los ordenes a menos que se indique lo contrario) y con el resultado de que toda operación algebraica entre campos vectoriales corresponde el resultado de una operación algebraica entre las derivaciones correspondientes.

Recordemos que para $f \in \mathfrak{F}(M)$, el rango de la función inducida Tf es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir

$$Tf : TM \to T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Restringiendo su dominio a la vecindad T_pM de TM se tiene

$$T_pf = Tf|_{T_pM}.$$

Obtenemos la siguiente función lineal,

$$T_pf : T_pM \to \{f(p)\} \times \mathbb{R}.$$

Definimos $df(p)$ por:

$$df(p) = p_2 T_p f,$$

donde p_2 es la proyección sobre la segunda coordenada como se define en la ecuación (10), $p_2(a,b) = b$.

En general M no es un abierto en $\mathbb{R}^n$, para simplificar identificaciones locales; con el propósito de evitar complicaciones con estas identificaciones consideraremos que M es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ su espacio tangente TM es isomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces f es una función de clase C^∞ a valores reales de n variables reales. La función inducida en el punto (p,x) del espacio tangente es dada por,

$$T_p f(p)(p,x) = (f(p), Df(p)x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

de lo cual el número $df(p)(p,x)$ puede ser identificado,

$$df(p)(p,x) = p_2 T_p f(p)(p,x) = Df(p)x.$$

Se puede ver a partir de estas expresiones que $df(p)$ resulta del operador lineal $Df(p)$ que actúa sobre x.

Puesto que $Df(m)$ es una función lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde se tiene un funcional lineal, además es un elemento de un espacio dual a $T_m(M)$, y puede representarse como una fila de n elementos con respecto a la base dual de la base canónica del espacio tangente. Esta notación de fila es bastante compatible con la notación explícita de una derivada usualmente encontrada en textos de cálculo avanzado:

$$Df(m) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(m), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(m). \tag{11}$$

Si $x^i(x)$ denota la i-ésima función coordenada para la variedad euclidiana que es válida localmente, se tiene

$$df(m)(m,dx) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(m)dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(m)dx^n = Df(m)dx, \tag{12}$$

que es una formalización de la expresión usual en textos avanzados de cálculo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n = \left(dx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + dx^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)f.$$

Las expresiones en (11) y (12) merecen una segunda mirada a la idea del comentario de que $Df(m)$ es un elemento del espacio dual al espacio tangente $T_m(M)$. Sin embargo los términos en el lado derecho de (12) son números reales, sus factores vienen de (11) y una columna de dx^i. Si los dx^i se consideran vectores unitarios en el espacio dual, (12) es un elemento de ese espacio. Según el método habitual de evaluación de los coeficientes de un vector o de un vector dual (o co-vector), los coeficientes de (12) deben provenir de la acción de elementos unitarios en el espacio vectorial original a los cuales los dx^i son duales. No se rompe ninguna interpretación de la expresión diferencial usual para tomar estos vectores unitarios como $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

La descripción anterior deja a la expresión de la ecuación (12) en una nueva idea. Permite la introducción de otra notación, la derivada de Lie de una función real f, con respecto a un campo vectorial $\mathbf{X}$. Esta será escrita como:

$$L_{\mathbf{X}}(f)(m) = df(m)(\mathbf{X}(m)). \tag{13}$$

Con respecto a la derivada de Lie se mostrará que es una notación conveniente cuyo uso puede intercambiarse en forma de operador diferencial. Dado que las dos formas desplazan diferentes elementos dentro o fuera de paréntesis e intercambian el orden de la escritura de los factores, la elección de la forma utilizada será dada en gran medida por el deseo de reducir la notación, por lo cual los factores son relevantes en el momento.

La definición en (13) es puntual, que es válido en cada punto del espacio tangente y espacio dual o espacio cotangente asociados con el punto m. Puesto que $L_{\mathbf{X}}$ dará el isomorfismo entre los espacios lineal de campos vectoriales $\chi(M)$ y el espacio lineal de derivaciones de funciones en $\mathfrak{F}(M)$; $L_{\mathbf{X}}f$ debe ser un elemento de $\mathfrak{F}(M)$ y tendremos que extenderla desde la definición puntual en (13). Para mostrar que $L_{\mathbf{X}}f \in \mathfrak{F}(M)$, se demuestra que df es una función diferenciable. Esto sigue después de que se muestra que el espacio cotangente es una variedad. Los detalles son largos y técnicos. El lector interesado puede leer [**?**] para la construcción del espacio cotangente y para la prueba de que $L_{\mathbf{X}}f \in \mathfrak{F}(M)$. Esto establece entonces que $L_{\mathbf{X}}$ mapea de $\mathfrak{F}(M)$ a $\mathfrak{F}(M)$.

Para mostrar que $L_{\mathbf{X}}$ es lineal, recordemos las aplicaciones definidas en el espacio $T_m f$, en particular se tiene

$$T_m f : T_m(M) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

De la ecuación (13) se obtiene:

$$L_{\mathbf{X}}(f+g)(m) = d(f+g)(m)(\mathbf{X}(m)).$$

Considerando la expresión en la clase de equivalencia,

$$\begin{aligned}
d(f+g)(m)[c]_m &= p_2 \cdot T_m(f+g)[c]_m \\
&= p_2((f+g)(m), D((f+g)\circ c)(0)) \\
&= D(f\circ c)(0) + D(g\circ c)(0) \\
&= p_2(f(m), D(f\circ c)(0)) \\
&\quad + p_2(g(m), D(g\circ c)(0)) \\
&= p_2 \cdot T_m f[c]_m + p_2 \cdot T_m g[c]_m \\
&= (p_2 \cdot T_m f + p_2 \cdot T_m g)[c]_m \\
&= (df(m) + dg(m))[c]_m.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que d es aditiva y el resto de la linealidad es análoga.

El mismo procedimiento que demostró que $L_{\mathbf{X}}$ es un operador lineal en $\mathfrak{F}(M)$ puede usarse para demostrar que es una derivación, es decir,

$$\begin{aligned} p_2 \cdot T_m fg[c]_m &= p_2(fg(m), D(fg \circ c)(0)) \\ &= D(fg \circ c)(0) \\ &= D((f \circ c)(g \circ c))(0) \\ &= f \circ c(0) D(g \circ c)(0) \\ &\quad + g \circ c(0) D(f \circ c)(0) \\ &= f(m) D(g \circ c)(0) + g(m) D(f \circ c)(0) \\ &= f(m) p_2 \cdot T_m g[c]_m + g(m) p_2 \cdot T_m f[c]_m. \end{aligned}$$

Luego, $L_{\mathbf{X}}(fg) = fL_{\mathbf{X}}(g) + gL_{\mathbf{X}}(f)$, lo que muestra que cada campo vectorial $\mathbf{X}$, determina una derivación sobre $\mathfrak{F}(M)$.

Observemos también que, a partir de lo que se conoce de $T_m f$, se cumple lo siguiente

$$L_{\mathbf{X}+f\mathbf{Y}}(g) = L_{\mathbf{X}}(g) + fL_{\mathbf{Y}}(g)$$

tal que cuando actúa sobre $\mathfrak{F}(M)$, L es una función lineal del conjunto de todos los campos vectoriales al espacio vectorial de derivaciones.

Una función lineal de un espacio vectorial a otro es un isomorfismo si es uno a uno y sobreyectiva. En el caso presente, es uno a uno si $L_{\mathbf{X}} f = 0$ para todo f, significa que $\mathbf{X} = 0$. Para demostrar este hecho, se muestra que cada elemento en el espacio dual de $T_m(M)$ está representado por algún $df(m)$. La prueba de existencia es una construcción de 'particiones de la unidad' que se puede encontrar en [**?**]. Una vez que se conoce que el espacio dual está representado por algún $df(m)$, la prueba de que L es uno a uno es simple. Pues, consideremos $L_{\mathbf{X}} = 0$. Entonces $L_{\mathbf{X}}(f)(m) = 0$ para todo f en $\mathfrak{F}(M)$. Entonces

$$df(m)(\mathbf{X}(m)) = 0,$$

es válido y cada elemento α en el dual de $T_m(M)$ tiene la propiedad de que $\alpha(\mathbf{X}(m)) = 0$. Así, $\mathbf{X}(m) = 0$, y es cierto para cada m en M.

La función es sobreyectiva si cada derivación surge de la derivada de Lie de un campo vectorial. Recordemos que para $\mathbb{R}^2$ hemos demostrado que cada derivación θ tiene la forma

$$\theta(f)(m) = \alpha_1(m)\frac{\partial f}{\partial x}|_m + \alpha_2(m)\frac{\partial f}{\partial y}|_m.$$

Consideremos el campo vectorial $\mathbf{X}(m) = (m, \alpha_1(m), \alpha_2(m))$; entonces:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}(f)(m) &= df(m)(\mathbf{X}(m)) \\ &= \alpha_1(m)\frac{\partial f}{\partial x}|_m + \alpha_2(m)\frac{\partial f}{\partial y}|_m \end{aligned}$$

luego $L_{\mathbf{X}} = 0$. En este caso, se tiene entonces que $M = \mathbb{R}^2$. Se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *El espacio lineal de los campos vectoriales $\chi(M)$ es isomorfo al espacio lineal de derivaciones de $\mathfrak{F}(M)$.*

5. El álgebra de Lie

En los espacios vectoriales de los campos vectoriales y el espacio de las derivaciones incorporamos un producto para obtener la estructura de álgebra en ambos espacios. Obtenemos este producto de manera natura, consideremos la composición de dos derivaciones que en general no es una derivación.

Sean θ_1 y θ_2 dos derivaciones, entonces de la composición de ambas se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_2\theta_1(fg) &= \theta_2[f\theta_1 g + g\theta_1 f] \\ &= \theta_2 f\theta_1 g + \theta_2 g\theta_1 f + f\theta_2\theta_1 g + g\theta_2\theta_1 f. \end{aligned} \tag{14}$$

Los dos primeros términos estropean la propiedad de derivación. Por otra parte, notemos que la otra composición es dada por

$$\theta_1\theta_2(fg) = \theta_1 f\theta_2 g + \theta_1 g\theta_2 f + f\theta_1\theta_2 g + g\theta_1\theta_2 f. \tag{15}$$

Restando la ecuación (15) de la ecuación (14) se obtiene

$$(\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2)(fg) = f(\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2)g + g(\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2)f$$

de manera que la operación $\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2$ es una derivación. Esta operación de diferencia se denomina conmutador, o corchete de θ_2 y θ_1, y será representa por

$$\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2 = [\theta_2, \theta_1].$$

Usando la forma de la derivada de Lie como un ejemplo, demostraremos que el corchete obtenido es una derivada de Lie. Con el objetivo de ser explícitos, consideremos el caso 2-dimensional la cual es dada por

$$L_{\mathbf{X}}(f) \triangleq a^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1}f + a^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2}f = \left(\sum_j (a(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f$$

y

$$L_{\mathbf{Y}}(f) \triangleq b^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1}f + b^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2}f = \left(\sum_j (b(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f.$$

Entonces

$$(L_{\mathbf{X}}L_{\mathbf{Y}})f = \left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\left(b^1\frac{\partial}{\partial x^1} + b^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right) f \tag{16}$$

$$= \left(\left(a^1\frac{\partial b^1}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial b^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(a^1\frac{\partial b^2}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial b^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} \tag{17}$$

$$+ b^1\left(a^1\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1} + a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^1}\right) + b^2\left(a^1\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}\right)\right) f$$

y

$$(L_{\mathbf{Y}}L_{\mathbf{X}})f = \left(b^1\frac{\partial}{\partial x^1} + b^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right) f \tag{18}$$

$$= \left(\left(b^1 \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(b^1 \frac{\partial a^2}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial a^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \right. \quad (19)$$
$$\left. + a^1 \left(b^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1}\right) + a^2 \left(b^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2}\right)\right) f.$$

Entonces

$$(L_{\mathbf{X}} L_{\mathbf{Y}} - L_{\mathbf{Y}} L_{\mathbf{X}}) f = [L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}] f \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\left(a^1 \frac{\partial b^1}{\partial x^1} - b^1 \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^1}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \right. \\ &\quad \left. + \left(a^1 \frac{\partial b^2}{\partial x^1} - b^1 \frac{\partial a^2}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial a^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2}\right) f \\ &= \left(\sum_j \left(\sum_i \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_j (c(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f = L_{\mathbf{Z}} f, \quad (21)$$

donde $(c(x))^j = a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}$ y $\mathbf{Z}$ es un campo vectorial en $\xi(M)$.

Al obtener el corchete elimina los términos con derivadas más altas de f, dejando una expresión con la forma apropiada para una derivada de Lie.

El isomorfismo que la derivada de Lie otorga entre campos vectoriales y derivaciones significa que las operaciones que implican derivaciones tienen operaciones correspondientes que implican campos vectoriales. La operación en campos vectoriales correspondiente a la operación de corchete en derivaciones también se denomina corchete más precisamente Corchete de Lie y se escribe de manera similar.

Un álgebra es un espacio vectorial dotado de una operación binaria interna que es asociativa. En particular, al espacio vectorial de campos vectoriales sobre una variedad $\Xi(M)$ dotado de la operación de corchete de Lie que es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi, es un álgebra que se conoce como el álgebra de Lie.

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son los campos vectoriales correspondientes a $L_{\mathbf{X}}$ y $L_{\mathbf{Y}}$, entonces existe un campo vectorial $\mathbf{Z}$ correspondiente a $[L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}]$ tal que $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. El siguiente teorema se cumple:

Teorema 5.1. *La operación de corchete de Lie en el espacio lineal de campos vectoriales forma un álgebra de Lie con las siguientes propiedades:*

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}] \\ (ii) & [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} + a\boldsymbol{Z}] = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] + a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}], \quad a \in \mathbb{R}^1 \\ (iii) & [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]] = 0 \end{array}\right\} \quad (22)$$

De hecho, un álgebra de Lie no es más que un conjunto de elementos que forman un espacio vectorial y en el cual se define una multiplicación por la operación de corchete con las tres propiedades del Teorema.

6. Aplicación a Sistemas de Control Lineales

La representación en el espacio de estados de los Sistemas de Control Lineales a coeficientes constantes es una buena fuente de un ejemplo de álgebra de Lie. Del sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A una matriz de $n \times n$, B una matriz de $n \times m$ ambas con entradas reales y $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una función constante por pedazos.

Obtenemos una familia de campos vectoriales, una para cada u. Sea $\mathbf{Z}_u$ el campo vectorial que actúa sobre un punto x por lo siguiente:

$$\mathbf{Z}_u(x) = (x, (Ax + Bu)) \in T_x(M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Suponiendo el punto base x, sea $\mathbf{Z}_u = Ax + Bu$. El ejemplo de un álgebra de Lie implicará calcular el álgebra de Lie más pequeña que contiene todos los elementos $\mathbf{Z}_u$ en $T_x(M)$. Definimos $\mathbf{Z}_u = (X + U)$ con $U = Bu$, $\mathbf{Z}_v = (X + V)$ con $V = Bv$ y $X = Ax = \mathbf{Z}_0$. También a partir de las ecuaciones (22),

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_u, \mathbf{Z}_v] &= [X + U, X + V] \\ &= -[X, U] + [X, V] + [U, V] \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que $[X, X] = 0$ para cualquier X. Por lo tanto, el álgebra de Lie generado por $\mathbf{Z}_u$ es dado por los conjuntos $\{X\}$, que es un conjunto de un elemento, y el conjunto de campos de vectores $\{U : U \in \mathbb{R}^n\}$. Estos corchetes pueden ser evaluados calculando los corchetes de las derivadas de Lie correspondientes. Las derivadas son escritos como en la ecuación (21),

$$L_X(f)(x) = \left(\sum_j (Ax)^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f$$

y

$$L_U(f)(x) = \left(\sum_j (Bu)^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) f.$$

Calculando el corchete para $[L_U, L_V] f = L_U L_V f - L_V L_U f$, se ve que todas las segundas parciales se anulan, como se muestra en las ecuaciones (17) y (19). Además, como los coeficientes $(Bu)^j$ no envuelven a x, sus derivadas desaparecen. Por lo tanto, $[L_U, L_V] = 0$. El siguiente corchete a considerar es $[L_X, L_U] f$, cuyos primeros términos son $L_X L_U$:

$$\begin{aligned} L_X L_U f &= L_X \sum_i (Bu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= \sum_j \sum_i (Ax)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (Bu)^i\right) \frac{\partial}{\partial x^j} f + S \\ &= S, \end{aligned} \quad (23)$$

donde S representa las derivadas parciales de segundo orden, los otros términos desaparecen. El otro término del corchete es un poco más complejo (tomar b^i_j como los elementos de B y a^i_j como los elementos de A), luego se tiene

$$\begin{aligned} L_U L_X f &= L_U \sum_i (Ax)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= \sum_j \sum_i (Bu)^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left((Ax)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \right) \\ &= \sum_j \sum_i \sum_k \sum_m b^j_k u^k \frac{\partial}{\partial x^j} (a^i_m x^m) \frac{\partial}{\partial x^i} f + S \\ &= \sum_j \sum_i \sum_k a^i_j b^j_k u^k \frac{\partial}{\partial x^i} f + S \\ &= \sum_i (ABu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f + S. \end{aligned} \tag{24}$$

Restando la ecuación (23) de la última línea de la ecuación anterior se obtiene:

$$(L_U L_X) f - (L_X, L_U) f = \sum_i (ABu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv L_{U^{(1)}} f.$$

El campo vectorial correspondiente a $L_{U^{(1)}}$ será denotado por

$$U^{(1)} = ABu.$$

La notación anticipa la definición de $U^{(k)} = A^k Bu$, donde A^k es la k-ésima potencia de A. Para ser coherente, $U^{(0)}$ reemplaza a U. Esta expresión se obtiene por repetir el procedimiento en las ecuaciones (24) que $[L_{U^{(k)}}, L_X] = L_{U^{(k+1)}}$. Por lo tanto, uno tiene que

$$[U^{(k)}, X] = U^{(k+1)} = A^{k+1} Bu.$$

El Teorema de Cayley-Hamilton dice que la n-ésima potencia de una matriz A de $n \times n$ es una combinación lineal de las potencias inferiores de la matriz, es decir,

$$A^n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i A^i.$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, el proceso de obtener los corchetes de Lie termina con

$$[U^{(n-1)}, X] = U^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i U^{(i)}.$$

El álgebra de Lie tiene la siguiente tabla de multiplicación:

	$X]$	$U^{(j)}]$
$[X,$	0	$-U^{(j+1)}$
$[U^{(k)},$	$U^{(k+1)}$	0

y cada campo vectorial $\mathbf{Z}_u$ puede ser escrito como la suma de campos vectoriales X, $U^{(0)}$, $\ldots$, $U^{(n-1)}$.

Cada campo vectorial que puede escribirse en estos términos, está relacionado con la noción de controlabilidad de los sistemas de control. De hecho, como se conoce el criterio de Kalman para la controlabilidad completa del sistema lineal de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax + Bu$ es que la matriz, cuyas columnas se obtienen de las columnas de $A^k B$, donde A es de $n \times n$, tiene rango n:

$$rang(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n.$$

Este es un ejemplo que muestra que la Teoría de la controlabilidad de los sistemas está relacionada con la dimensión del álgebra de Lie generada por las familias de campos vectoriales. La literatura es rica con respecto a la conexión con sistemas no lineales (véase, por ejemplo, [5]). El álgebra de Lie de todos los campos vectoriales sobre una variedad parece ser un objeto muy difícil de estudiar. Hay muchas preguntas matemáticas que envuelven este álgebra que probablemente no serán contestadas en un futuro próximo. Sin embargo, cuando la variedad es un grupo de Lie existe una subálgebra que está íntimamente relacionada con la estructura del grupo de Lie.

7. Conclusiones

Según los resultados descritos se concluye que la descripción de los campos vectoriales definidos sobre una variedad diferenciable, como derivaciones de funciones diferenciables definidas en la variedad diferenciable a valores reales a través del isomorfismo, permite dotar al espacio vectorial de campos vectoriales de un producto denominado Corchete de Lie, de ahí obtenemos la estructura de álgebra de Lie.

Finalmente, se describe una aplicación de lo interesante de obtener álgebras de Lie, puesto que se constituye en una herramienta para decidir la controlabilidad de sistemas de control. De manera más específica se tiene la extensión de la Condición de Controlabilidad de Kalman a la estructura de variedad diferenciable por medio de Corchetes de Lie y la búsqueda del subespacio de Lie más pequeño generado por los campos vectoriales que rigen el Sistema de Control definido en una variedad diferenciable.

Referencias

[1] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, N.Y., 1977.

[2] A.A. Sagle and R.E. Walde, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, INC, New York, N.Y., 1973.

[3] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, I.M. Singer, Illinois, 1971.

[4] R.W. Brockett, *Some Geometric Questions in the Theory of Linear Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-21;4, Aug. 1976, pp. 449-455.

[5] R. Hermann and A.J. Krener, *Nonlinear Controllability and Observability*, IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC-22:5, Oct. 1977, pp.728-740.