Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 47–50

IIMAT

Teorema de Ptolomeo

Lopez Apaza Huber D.

Resumen

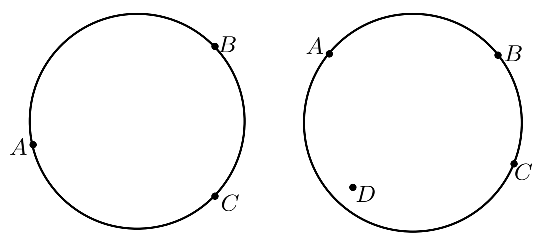
El presente articulo pretende mostrar propiedades conocidas de la geometría, como consecuencia de la aplicación del teorema de Ptolomeo. La cual hace referencia a la caracterización de los cuadriláteros cíclicos a través de sus lados.

Palabras clave: Cuadriláteros cíclicos, Teorema de Ptolomeo.

Claudio Ptolomeo, científico de origen egipcio, fue un importante astrónomo, matemático y geógrafo de ascendencia griega que floreció en Alejandría durante el siglo II d.C. Sus escritos representan el logro culminante de la ciencia grecorromana, principalmente si nos referimos a su modelo geocéntrico el cual estaba fundamentado en el centro de la tierra como modelo del universo lo que en la actualidad conocemos como el sistema Ptolemaico. Otra gran obra suya es la Geographia, en que describe el mundo de su época. Utiliza un sistema de latitud y longitud que sirvió de ejemplo a los cartógrafos durante muchos años. Esta obra contenía graves errores en cuanto a distancias, de hecho, se piensa que Colón terminó descubriendo América producto de que en el mapa de Ptolomeo las Indias se encontraba notablemente más cercanas al navegar en esa dirección.

1. Introducción

Un hecho conocido en geometría es por cualquiera tres puntos no alineados, siempre es posible hacer pasar una una única circunferencia. Basta tomar como centro el punto donde concurren las mediatrices del triángulo y como radio la distancia de este punto a cualquiera de los vértices. ¿Pero qué podemos decir si consideramos cuatro puntos en lugar de tres.? Como es de esperar, no siempre existirá una circunferencia que pase por estos cuatro puntos. Por ejemplo, consideremos la circunferencia que pasa por los puntos, A, B, C y agreguemos un cuarto punto D, el cual no esté sobre la circunferencia. Claramente se puede ver, que no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos. De aquí se ve que los cuadriláteros que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma especiales. A tales cuadriláteros se les acostumbra llamar cuadriláteros cíclicos.



Definición 1.1. Un cuadrilátero se llama cíclico si existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vertices.

2. Dos criterios para la caracterización de cuadriláteros cíclicos

Si un $\square ABCD$ está inscrito en una círcunferencia como en la Figura a, sabemos que los ángulos opuestos son suplementarios. Esto se sigue del hecho que son inscritos y que entre los dos abarcan la circunferencia completa. Inversamente, si tenemos un $\square ABCD$

✉ DelboyLopez@gmail.com (Lopez Apaza Huber D.)

en el que un par de sus ángulos opuestos son suplementarios, sabemos que el cuadrilátero es cíclico.
Del mismo modo, si tenemos un $\square ABCD$ inscrito en un círcunferencia como en la Figura b, sabemos que los ángulos que comparten un mismo arco son iguales entre sí. Recíprocamente, si en $\square ABCD$ las diagonales forman con los lados opuestos ángulos iguales, dicho cuadrilátero es cíclico.

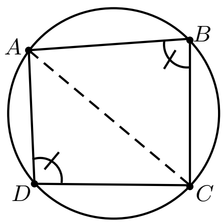


Figura a.

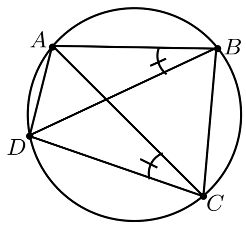


Figura b.

Las dos discusiones descritas anteriormente, son las demostraciones de los siguientes teoremas.

Teorema 2.1. *Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

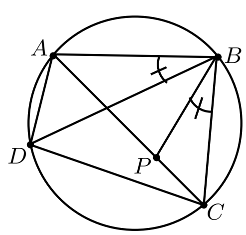
Teorema 2.2. *Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo si las diagonales forman con los lados opuestos ángulos iguales.*

Los dos teoremas anteriormente mencionados caracterizan a los cuadriláteros cíclicos a través de sus ángulos. Otra caracterización se puede hacer respecto a sus lados, y de hecho, este es conocido como Teorema de Ptolomeo, el cual enunciaremos y demostramos a continuación.

3. Teorema de Ptolomeo

Teorema 3.1 (Teorema de Ptolomeo)**.** *Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$*

Demostración. Empezaremos demostrando que si el cuadrilátero es cíclico, se cumple la expresión dada en el enunciado. Consideramos un punto P sobre la diagonal AC, de tal manera que $\measuredangle PBC = \measuredangle ABD$.



Dado que $\square ABCD$ es cíclico, también tenemos que $\measuredangle PCB = \measuredangle ADB$. De aquí deducimos que los triángulos PBC y ABD son semejantes, por lo que:

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

Análogamente se tiene que los triángulos BAP y BDC son semejantes, de donde se tiene que:

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}$$

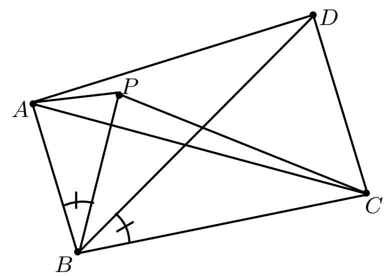
Sumando las dos expresiones obtenidas anteriormente tenemos:

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

por tanto

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Ahora demostraremos la otra implicación, es decir, si cumple la expresión $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ es un cuadrilátero cíclico. Consideramos el cuadrilátero de la figura de vértices $ABCD$.



Construir un triángulo APB semejante al triángulo DCB, de tal forma que el lado AB se corresponda con BD, y los ángulos con vértice B marcados en la figura, sean iguales.
Por la semejanza se cumple:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{CD}$$

de donde se tiene:

$$AB \cdot CD = AP \cdot BD$$

La primera de las igualdades de la proporción junto a la igualdad de los ángulos marcados establece que los triángulos PBC y ABD son semejantes, por tanto:

$$\frac{PC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

de donde se tiene:

$$BC \cdot AD = PC \cdot BD$$

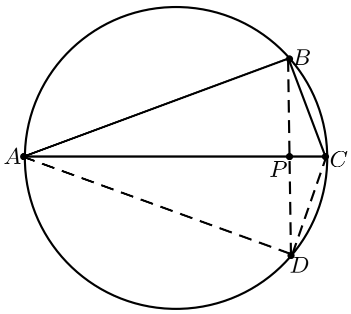
Y sumando las dos igualdades nos queda:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AP \cdot BD + PC \cdot BD \geq AC \cdot BD$$

Desigualdad que es válida para cualquier cuadrilátero, cuya igualdad se dará si y sólo si los puntos A, P, C son colineales y que $\measuredangle BAC = \measuredangle BAP = \measuredangle BDC$. Así el $\square ABCD$ es cíclico. $\square$

Veamos ha continuación algunas consecuencias interesantes del teorema de Ptolomeo.

Primero consideremos un triángulo rectángulo ABC inscrito en una circunferencia y hacemos la construcción del cuadrilátero $ABCD$, obteniendo el punto D por simetría del punto B respecto la hipotenusa.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Dado que los triángulos ABC y ADC son congruentes, se tiene que $AD = AB$, $BC = CD$ y $BD = 2 \cdot BP$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

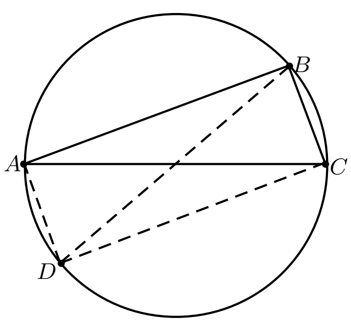
$$AC \cdot 2 \cdot BP = AB \cdot BC + AB \cdot BC = 2 \cdot AB \cdot BC$$

Simplificando

$$AC \cdot BP = AB \cdot BC$$

Así queda demostrado, que el producto de longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al producto de longitudes de la hipotenusa y la altura respectiva.

Análogamente al caso anterior consideremos un triángulo rectángulo ABC inscrito en una circunferencia y hacemos la construcción del rectángulo $ABCD$, obteniendo el punto D por simetría del punto B respecto el centro de la circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

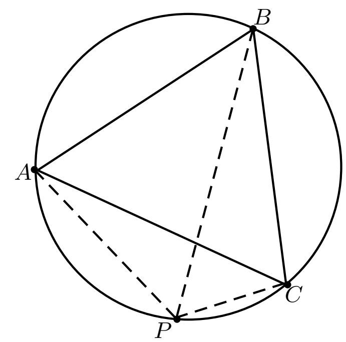
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Dado que $\square ABCD$ es un rectángulo, se tiene que $AB = CD$, $AD = BC$ y $AC = BD$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Con lo cual queda demostrado, que la suma de los cuadrados de longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Ahora consideremos un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia y un punto P de la circunferencia.



aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AP \cdot BC + AB \cdot PC = AC \cdot BP$$

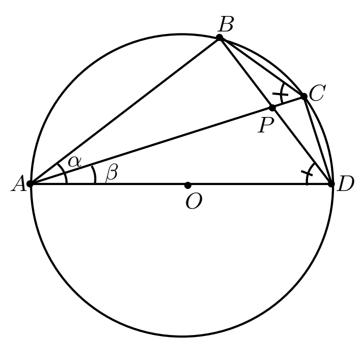
Dado que ABC es un triángulo equilátero se tiene, $AB = BC = AC$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene que:

$$AP \cdot BC + BC \cdot PC = BC \cdot BP$$

simplificando se tiene:

$$AP + PC = BP$$

Consideremos ahora, un cuadrilátero cíclico cuyo uno de sus lados sea el diámetro de la circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD - AB \cdot CD$$

Dividiendo por AD^2, tenemos:

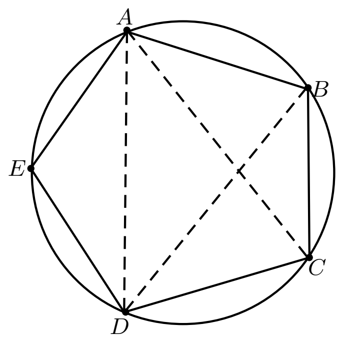
$$\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

Sea $\alpha = \measuredangle DAB$, $\beta = \measuredangle DAC$, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{BD}{AD}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{CD}{AD}$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{BP}{AP}$, $\cos\alpha = \frac{AB}{AD}$ y $\cos\beta = \frac{AC}{AD}$. Como el triángulo APD es semejante al triángulo BPC, entonces $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

que es la conocida fórmula del seno de la diferencia de ángulos.

Ahora consideremos el pentágono regular $ABCDE$, inscrita en una circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABCD$ se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Dado que $ABCDE$ es un pentágono regular se tiene, $AB = DC = BC$ y $AC = BD = AD$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene que:

$$AC^2 = AB^2 + AC \cdot AB$$

Dividiendo por AB^2, se tiene:

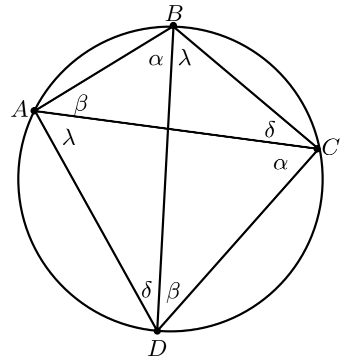
$$\frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{AC}{AB}$$

Si denotamos con φ a $\frac{AC}{AB}$ se obtiene:

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

La cual es conocida como la razón de oro.

Para terminar, consideremos el cuadrilátero $ABCD$, inscrita en una circunferencia de diámetro R.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \tag{1}$$

Como $ABCD$ es cíclico se tiene, $\measuredangle CAD = CBD = \lambda$, $\measuredangle BCA = \measuredangle BDA = \delta$, $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC = \beta$ y $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \alpha$.
De donde se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{sen}\alpha = \frac{AD}{R} & ; & \operatorname{sen}\delta = \frac{AB}{R} \\ \operatorname{sen}\beta = \frac{BC}{R} & ; & \operatorname{sen}(\alpha+\lambda) = \frac{AC}{R} = \operatorname{sen}(\delta+\beta) \\ \operatorname{sen}\lambda = \frac{CD}{R} & ; & \operatorname{sen}(\lambda+\beta) = \frac{BD}{R} = \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \end{array}$$

Reemplazando en (1), se tiene:

$$R \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\lambda) \cdot R \cdot \operatorname{sen}(\lambda+\beta) = R \cdot \operatorname{sen}\delta \cdot R \cdot \operatorname{sen}\lambda + R \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot R \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Simplificando, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\lambda) \cdot \operatorname{sen}(\lambda+\beta) = \operatorname{sen}\delta \cdot \operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

donde esta igualdad se cumple si $\alpha + \beta + \lambda + \delta = \pi$ y es conocida como el teorema trigonométrico de Ptolomeo.

Referencias

[1] Geometría en Olimpiadas de Matemáticas, *Jesús Jerónimo Castro.*
[2] Problemas sobre cuadriláteros, *Rocío López Anguita.*
[3] Geometría, *José Antonio Gómez Ortega.*
[4] La enciclopedia de contenido libre, *wikipedia.*