Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 17–21

IIMAT

Dinámica estocástica de aplicaciones uniformemente expansoras

Jimmy Santamaria[a,1]

[a] *Universidad Mayor de San Andrés, Avenida Villazón # 1995, La Paz, Bolivia.*

Resumen

En este artículo de divulgación definimos algunas de las propiedades fundamentales de la teoría ergódica de sistemas dinámicos: ergodicidad, sistemas misturadores, decaimiento de correlaciones, teorema del límite central y de el teorema de grandes desvíos. En la última sección introducimos los sistemas expansores que es la clase de sistemas más simple que verifica las propiedades recientemente mencionadas. Se da un bosquejo muy simple de algunos de los argumentos en el estudio de la dinámica estocástica de sistemas expansores.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, teoría ergódica, aplicaciones uniformemente expansoras.

1. Introducción

Supongamos que la evolución en el tiempo de un proceso de la naturaleza esté descrito por una transformación $f : M \to M$ en alguna variedad M. Las cantidades físicamente observables corresponden a funciones reales φ definidas en el espacio de fase M. Entonces los datos experimentales del sistema tendrán usualmente la forma de sucesiones de "mediciones" $\varphi(f^j(x))$, donde $z \in M$ y $j \geq 0$. De esa información se intenta extraer las propiedades intrínsecas principales del proceso dinámico en consideración.

Con frecuencia estas sucesiones temporales $\varphi(f^j(x))$ se comportan de manera complicada y "errática" cuando j varía en el tiempo, inclusive para leyes de evolución sencillas f. Es más, las sucesiones temporales pueden depender sensiblemente del estado inicial del sistema: modificaciones arbitrariamente pequeñas de $x \in M$ típicamente implican valores considerablemente diferentes de $\varphi(f^j(x))$ para j grande. Tales comportamientos "caóticos" significan que la dinámica puede ser difícil de entender en términos determinísticos y que el análisis estadístico de las sucesiones temporales puede dar mejores resultados.

✉ jsantamaria@fcpn.edu.bo (Jimmy Santamaria)

[1] Trabajo financiado por la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés dentro del proyecto Sistemas Dinámicos y Aplicaciones.

2. Medidas físicas

Una pregunta básica es la existencia de medias temporales asintóticas

$$E_x(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

para "muchos" puntos $x \in M$. Claramente, $E_x(\varphi)$ existen siempre que x es un punto periódico de f. Más generalmente, el teorema ergódico de Birkhoff afirma que las medias temporales asintóticas existen para casi todo punto, para todo observable continuo, respecto a cualquier medida de probabilidad f- invariante. Este hecho es bastante relevante si f preserva volumen, i.e. f deja invariante alguna medida de Lebesgue en la variedad M. Sin embargo, medidas invariantes arbitrarias pueden carecer de significado físico. En general, "muchos" significará "en un conjunto de medida Lebesgue positiva".

Aun más, se quisiera entender cuando la media temporal asintótica es independiente del punto inicial. Supongamos que para toda función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ la media asintótica $E_x(\varphi)$ es independiente del punto x tomado en un conjunto de medida Lebesgue positiva $B \subset M$. Entonces

$$\varphi \mapsto E(\varphi) = E_x(\varphi) \qquad (\text{cualquier } x \in B)$$

define un operador lineal no negativo en el espacio $C^0(M, \mathbb{R})$ de funciones reales continuas que por el teorema de representación de Riesz, ver [1, Cap. 2], está asociado a una medida de Borel μ en M por:

$$\int \varphi \, d\mu = E(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \qquad (\text{cualquier } x \in B).$$

Observemos que tal medida μ puede ser “físicamente observada” por el cálculo de las medias temporales de funciones continuas para puntos $x \in M$ elegidos aleatoriamente (existe probabilidad positiva de elegir $x \in B$). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. Una medida de probabilidad f- invariante μ es una medida *física* o *SRB* (por *Sinai-Ruelle-Bowen*) de f si existe un conjunto de medida Lebesgue positiva de puntos $x \in M$ tales que

$$\int \varphi \, d\mu = E(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)). \tag{1}$$

para cada $\varphi \in C^0(M, \mathbb{R})$. El conjunto de puntos $x \in M$ que satisfacen esta propiedad es denominado cuenca ergódica de μ y se denota por $B(\mu)$.

Se cree que las medidas SRB existen en gran generalidad sin embargo su existencia solo se conoce para ciertas clases de sistemas, por ejemplo para aplicaciones expansoras. Por otra parte existen sistemas que no admiten una medida SRB, ver el ejemplo debido a Bowen en [2, p.8], [3, p.7] o [4, p.3].

3. Sistemas con “pérdida de memoria”

En la teoría de sistemas dinámicos es importante comprender la “pérdida de memoria” y la “creación de información” los sistemas con la evolución del tiempo. Por ejemplo, estudiar como órbitas comenzando en puntos próximos “olvidan” este hecho rápidamente: la evolución de cada órbita genera nueva información que no puede ser deducida de la información inicial, ni de la evolución de otra órbita. Existen varias propiedades que pretenden entender el comportamiento de sistemas con estas características.

3.1. Sistemas ergódicos

Un sistema se dice ergódico cuando para cada observable la media temporal asintótica es independiente del punto.

Definición 3.1. Sea $f : M \to M$ y μ una medida f-invariante. Se dice que el sistema (f, μ) es ergódico si satisface alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

- Si $A \subset M$ es invariante, i.e. $f^{-1}(A) = A$, entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.
- Para μ-casi todo punto x:

$$\int \varphi \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad \text{para todo } \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}).$$

3.2. Sistemas misturadores

Sea $f : M \to M$ y μ una medida invariante por f. Queremos medir en que medida observaciones $\varphi(f^j(x))$, hechas para j grande, son afectadas por valores iniciales $\psi(x)$ de algún observable dado $\psi : M \to \mathbb{R}$ (posiblemente con $\psi = \varphi$). Para entender este fenómeno consideramos las *funciones de correlación*

$$C_n(\varphi, \psi) = \int (\varphi \circ f^n)\psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \int \psi \, d\mu.$$

Notemos que $C_n(\varphi, \psi) = 0$ significa en términos probabilísticos que $\varphi \circ f^n$ y ψ son variables aleatorias independientes.

Definición 3.2. Un sistema (f, μ) es misturador si $C_n(\varphi, \psi) \to 0$ para cada par de observables φ, ψ.

Notemos que en un sistema misturador (f, μ) las variables aleatorias $\varphi \circ f^n$ son cada vez menos y menos dependientes de la variable aleatoria ψ cuando $n \to \infty$.

Definición 3.3. Un sistema (f, μ) es *exponencialmente misturador* o *tiene decaimiento exponencial de correlaciones* si existe $\tau < 1$ y para cada par (φ, ψ) existe $C > 0$ tal que

$$|C_n(\varphi, \psi)| \le C\tau^n \qquad \text{para todo } n \ge 1.$$

Observación 3.1. La noción de sistema misturador o de decaimiento de correlaciones siempre es relativo a un espacio funcional adecuado, es decir φ y ψ, en las Definiciones 3.2 y 3.3, pertenecen a un espacio de Banach de funciones $\mathcal{F}$. En particular la existencia y el valor de τ en la Definición 3.3 dependen de $\mathcal{F}$.

4. Aleatoriedad

Otra importante caracterización de casi independencia (más precisamente de débil correlación) de observaciones sucesivas puede ser dada en términos de los teoremas del límite central y de grandes desvíos. Ambos resultados describen las oscilaciones de las medias temporales finitas

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

alrededor del valor esperado $\int \varphi d\mu$. Empezaremos recordando resultados clásicos de probabilidad.

Teorema 4.1 (Teorema del límite central para v.a.i.i.d.)**.** *Sean $X_0, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con valores en $\mathbb{R}$, con media $\bar{X} = E(X_n) < \infty$ y varianza $\sigma^2 = E((X_n - \bar{X})^2) \in (0, +\infty)$. Entonces, dado cualquier intervalo abierto $A \in \mathbb{R}$, la probabilidad de*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - \bar{X}) \in A \quad \textit{converge a} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

cuando $n \to \infty$.

Teorema 4.2 (Teorema de grandes desvíos para v.a.i.i.d)**.** *Sean $X_0, \ldots, X_n, \ldots$, $\bar{X}$ y σ como en el Teorema 4.1. Supongamos que $E(e^{tX_n}) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, la probabilidad $\mathcal{P}(n, \epsilon)$ de*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - \bar{X}) \right| > \epsilon$$

converge a cero exponencialmente rápido cuando $n \to \infty$ en el sentido que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{P}(n, \epsilon) < 0.$$

Cada uno de los dos últimos teoremas es parte de una familia de resultados relacionados que incluyen enunciados considerablemente más sofisticados. Ver el Apéndice B de [3] por pruebas, información adicional y referencias.

Definición 4.1. Un observable φ *satisface el teorema del límite central* para (f, μ) si existe $\sigma > 0$ tal que para todo intervalo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu \left\{ x \in M \,:\, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\varphi(f^j(x)) - \int \varphi \, d\mu \right) \in A \right\}$$

tiende hacia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} \right) dt,$$

cuando $n \to \infty$.

Definición 4.2. Un observable φ *satisface el teorema de grandes desvíos* para (f, μ) si dado $\epsilon > 0$ existe $h(\epsilon) > 0$ tal que

$$\mu \left\{ x \in M \,:\, \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(f^j(x)) - \int \varphi \, d\mu) \right| > \epsilon \right\} \leq e^{-nh(\epsilon)}$$

para n suficientemente grande.

Cuando φ tiene decaimiento de correlaciones suficientemente rápido satisface los teorema de los grandes desvíos y del límite central, lo que significa en algún sentido, que las observaciones temporales individuales se comportan de manera "esencialmente" aleatoria en intervalos grandes de tiempo.

5. Perturbaciones aleatorias

A menudo, la formulación matemática $f : M \to M$ de un proceso físico dado involucra simplificaciones, donde la parte "principal" del proceso es aislada (esta parte es lo que f describe) y ciertos elementos no son contemplados por ser muy complicados para ser tomados en consideración y se espera que su influencia sea suficientemente pequeña para que puedan ser descartados. Es claro que este proceso requiere una justificación especialmente si como es frecuente el sistema simplificado, representado por f, resulta ser estructuralmente inestable, i.e. aplicaciones g arbitrariamente cerca a f tienen comportamientos dinámicos muy diferentes a f, ver [3, Sección 1.5] para la definición precisa de estabilidad estructural.

En muchas situaciones en las que estos elementos descartados no son completamente entendidos, o son muy complicados para ser expresados efectivamente en términos determinísticos, se puede pensar que ellos son un especie de "ruido" aleatorio. La estabilidad estocástica significa que la presencia de pequeños ruidos tienen un efecto pequeño en el comportamiento asintótico de f.

Comenzaremos describiendo dos modelos importantes de perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos discretos. Sean $f : M \to M$ y U un conjunto abierto de M tal que $f(U)$ es relativamente compacto en U. El nivel del ruido que consideraremos $\epsilon > 0$ siempre es menor que la distancia de $f(U)$ a $M \setminus U$ de tal forma que las órbitas aleatorias no pueden escapar de U.

5.1. *Modelo de cadenas de Markov*

El modelo de perturbaciones aleatorias por cadenas de Markov está definido por una familia $\{p_\epsilon(\cdot|z) : z \in U, \epsilon > 0\}$ de medidas Borelianas de probabilidad tales que $p_\epsilon(\cdot|z)$ está soportada en la bola de radio ϵ con centro en $f(z)$. Las órbitas aleatorias son sucesiones $\{z_j\}$ donde cada z_{j+1} es una variable aleatoria distribuida con probabilidad $p_\epsilon(\cdot|z_j)$.

Una probabilidad μ_ϵ es *estacionaria* para la cadena de Markov si

$$\mu_\epsilon(E) = \int p_\epsilon(E, z) d\mu_\epsilon(z) \tag{2}$$

para todo conjunto Boreliano $E \subset U$. Equivalentemente, el producto semidirecto de medidas $\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}}$ dado por

$$d(\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}})(z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots) = \mu_\epsilon(dz_0) p_\epsilon(dz_1|z_0) \cdots p_\epsilon(dz_n|z_{n-1}) \cdots$$

es invariante por el shift $\mathcal{F} : U \times U^{\mathbb{N}} \to U \times U^{\mathbb{N}}$ en el espacio de órbitas aleatorias $\{z_j : j \geq 0\}$. Por el teorema ergódico, la media temporal de toda función continua $\varphi : U \to \mathbb{R}$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z_j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ \pi_0)(\mathcal{F}^j(\mathbf{z}))$$

existe en un conjunto de medida $\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}}$ total en el conjunto de órbitas aleatorias $\mathbf{z} = \{z_j\}$.

Observación 5.1. Medidas estacionarias siempre existen si las probabilidades de transición $p_\epsilon(\cdot|z)$ dependen continuamente en la topología débil*, ver el Lema D.1 de [2].

5.2. *Modelo de iterados aleatorios de aplicaciones*

En este modelo se consideran sucesiones obtenidas por iteraciones $z_j = g_j \circ \cdots g_1(z_0)$ de aplicaciones g_j elegidas aleatoriamente en bolas de radio ϵ con centro en f. Consideremos una familia $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ de probabilidades en el espacio de aplicaciones C^r, para algún $r \geq 1$, tal que el soporte de ν_ϵ esta contenido en la bola $B(\epsilon, f)$. La órbita aleatoria asociada a $(z_0, \mathbf{g})$ es la sucesión $z_j = g_j \circ \cdots g_1(z_0)$, donde los g_j son variables aleatorias independientes distribuidas según ν_ϵ.

Una medida μ_ϵ se dice *estacionaria* para este modelo de perturbación si para todo conjunto Boreliano $E \subset U$ se tiene

$$\mu_\epsilon(E) = \int \mu_\epsilon(g^{-1}(E)) d\nu_\epsilon(g). \tag{3}$$

5.3. Relación entre ambos modelos de perturbación

A una familia de probabilidades $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ que determinan un modelo de perturbación aleatoria de f esta asociada un cadena de Markov definida por

$$p_\epsilon(E|z) = \nu_\epsilon(\{g : g(z) \in E\}).$$

En esta situación μ_ϵ es una medida estacionaria en el sentido de (2) si y solamente si lo es en el sentido (3). En este caso las probabilidades $p_\epsilon(\cdot, |z)$ varían continuamente con z, por tanto medidas estacionarias existen, ver la Remarca 5.1.

Notemos que para cualesquiera conjuntos medibles

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \subset U,$$

el conjunto

$$(\mu_\epsilon \times \nu_\epsilon^{\mathbb{N}})(\{(z_0, \mathbf{g}) : z_0 \in A_0, g_1(z_0) \in A_1, \ldots, g_m \cdots g_1(z_0) \in A_m\})$$

es igual a

$$\begin{aligned} &= \int_{A_0} d\mu_\epsilon(z_0) \int \chi_{\{g_1 : g_1(z_0) \in A_1\}} d\nu_\epsilon(g_1) \cdots \\ &\qquad \cdots \int \chi_{\{g_m : (g_m \cdots g_1)(z_0) \in A_m\}} d\nu_\epsilon(g_m) \\ &= \int_{A_0} d\mu_\epsilon(z_0) \int_{A_1} p_\epsilon(dy_1|z_0) \cdots \int_{A_m} p_\epsilon(dy_m|y_{m-1}) \\ &= (\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}})(A_0 \times A_1 \times \cdots A_m). \end{aligned}$$

Es decir que la estadística de las órbitas aleatorias obtenidas por iterados aleatorios son reproducidos fielmente por la cadena de Markov asociada.

Hemos visto que cualquier esquema de aplicaciones aleatorias puede ser realizado con una cadena de Markov. El problema inverso es discutido por Kifer en [5, Sección 1.1].

5.4. Estabilidad estocástica

Supongamos que existe una única medida estacionaria μ_ϵ para todo ϵ suficientemente pequeño. Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z_j) \to \int \varphi \, d\mu_\epsilon$$

para casi toda órbita aleatoria $\left\{z_j\right\}$ y toda función continua φ.

Definición 5.1. El sistema (f, μ) es *estocásticamente estable* bajo el esquema de perturbación $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ (o $\{p_\epsilon(\cdot|z) : z \in U, \epsilon > 0\}$) si μ_ϵ converge a μ en la topología débil*:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int \varphi \, d\mu_\epsilon = \int \varphi \, d\mu \quad \text{para toda función continua } \varphi : U \to \mathbb{R}.$$

6. Transformaciones uniformemente expansoras

Se dice que $f : M \to M$ es (*uniformemente*) *expansora* si existe una métrica Riemanniana $\|\cdot\|$ en M y una constante $\sigma > 1$ tal que

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma \|v\| \quad \text{para todo } x \in M \text{ y todo } v \in T_x M. \tag{4}$$

Notemos que la existencia de $\sigma > 1$ en (4) es una condición C^1 abierta, i.e. transformaciones de M suficientemente cerca a f en la topología C^1 son también expansoras.

Ejemplo 6.1. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal tal que $F(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Entonces existe una única aplicación f en el toro n- dimensional $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$, donde $\pi : \mathbb{R}^n \to M$ es la proyección canónica. Si todos los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de F tienen norma estrictamente mayor que 1 entonces f es expansora: cualquier $1 < \sigma < \min_i |\lambda_i|$ verifica (4).

Teorema 6.1. *Sea $f : M \to M$ una aplicación expansora de clase $C^{1+\nu_0}$ para algún $\nu_0 \in (0, 1]$. Entonces,*

- *f admite una única medida de probabilidad μ_0 que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Es más, μ_0 es ergódica, su soporte coincide con M y su cuenca de atracción $B(\mu_0)$ es un subconjunto de M de medida Lebesgue total. En particular, μ_0 es la única medida SRB de f;*
- *(f, μ_0) es exponencialmente misturador y satisface el teorema del límite central en el espacio de Banach de funciones ν- Hölder continuas para cualquier $\nu \in (0, \nu_0]$;*
- *(f, μ_0) es estocásticamente estable bajo perturbaciones de iterados aleatorios de aplicaciones.*

Las demostración del Teorema 6.1 está basada en que las propiedades ergódicas de f pueden ser derivadas de propiedades espectrales de su operador de transferencia, también llamado operador Perron-Frobenius, actuando en algún espacio conveniente de observables $\varphi : M \to \mathbb{R}$. El operador de transferencia asociado a la transformación expansora $f : M \to M$ está definido por

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det Df(x)|},$$

note que la suma es sobre un número finito de términos. Una consecuencia inmediata de la definición y de la fórmula de cambio de variables es

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi \, dm = \int \varphi(\psi \circ f) \, dm, \tag{5}$$

donde m es la medida de probabilidad de Lebesgue en M. La relación (5) implica, en particular, que los puntos fijos de $\mathcal{L}$ están directamente relacionados con medidas invariantes por f que sean absolutamente continuas respecto a m. En efecto, si φ_0 es una función no negativa en $L^1(m)$ satisfaciendo $\mathcal{L}\varphi_0 = \varphi_0$ entonces

$$\mu_0 = \frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 \, dm} m$$

es una probabilidad f invariante, claramente $\mu_0 \ll m$. Recíprocamente, si una medida finita f-invariante μ_0 es absolutamente continua con respecto a m entonces la derivada de Radon-Nikodim $\varphi_0 = d\mu_0/dm$ satisface $\mathcal{L}\varphi_0 = \varphi_0$.

Para probar la existencia de un punto fijo para el operador $\mathcal{L}$ se usa la noción de métrica proyectiva asociada a un cono convexo en un espacio vectorial introducida por G. Birkhoff. Precisando, se construye un cono C en el espacio de funciones Hölder continuas que es aplicado estrictamente dentro de el por el operador $\mathcal{L}$, se concluye que $\mathcal{L} : C \to C$ es una contracción, con respecto a la métrica proyectiva asociada a C, y la primera afirmación del Teorema 6.1 se deriva de este hecho.

La propiedad de contracción permite que podamos describir mejor las propiedades espectrales del operador $\mathcal{L}$ y demostrar que (f, μ_o) tiene decaimiento exponencial de correlaciones en el espacio de funciones Hölder continuas. En esta etapa de la demostración del Teorema 6.1 se analiza la velocidad de convergencia al equilibrio:

$$f_*^n(\varphi m) \to (\int \varphi \, dm)\mu_0.$$

La prueba que el sistema (f, μ_0) satisface el Teorema del límite central esta basada en las estimativas obtenidas al estudiar el decaimiento de correlaciones y el siguiente teorema abstracto del limite central para sistemas dinámicos:

Teorema 6.2. *Sean $(M, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $f : M \to M$ una aplicación medible, μ una probabilidad f-invariante ergódica y $\phi \in L^2(\mu)$ tal que $\int \phi \, d\mu = 0$. Sea $\mathcal{A}_n$ la sucesión no creciente de σ-álgebras definidas por $\mathcal{A}_n = f^{-n}(\mathcal{A})$, $n \geq 0$. Supongamos que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|E(\phi|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Entonces el número $\sigma \geq 0$ tal que

$$\sigma^2 = \int \phi^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \phi(\phi \circ f^n) d\mu$$

es finito y $\sigma = 0$ si y solamente si $\phi = u \circ f - u$ para algún $u \in L^2(\mu)$. Por otra parte, si $\sigma > 0$ entonces para cualquier intervalo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\mu \left\{ x \in M \ : \ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) \in A \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

cuando $n \to \infty$.

Para estudiar perturbaciones aleatorias se desarrolla un análisis de un operador de transferencia "perturbado"para probar la estabilidad estocástica. El método también implica *estabilidad estadística*: la aplicación $f \mapsto \mu_0$ es continua en la topología $C^{1+\nu_0}$.

Las primeras dos afirmaciones del Teorema 6.1 son esencialmente debidas a Ruelle [6]. Sin embargo, el esquema presentado para la prueba del limite central en el Teorema 6.1 se debe a [7]. La estabilidad de aplicaciones expansoras por perturbaciones aleatorias con cadenas Markovianas fue probada por primera vez por Kifer en [5, 8].

Existe la noción de aplicaciones no uniformemente expansoras y existe un análisis estadístico correspondiente, ver [9].

7. Conclusiones

Los sistemas dinámicos, como disciplina, tuvieron sus orígenes con la introducción de métodos cualitativos en problemas provenientes de la mecánica celeste por Poincaré. Los resultados que se mostraron en esta nota, son de otra naturaleza, pertenecen a la Teoría Ergódica, que es el estudio del comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico partiendo de casi todo punto inicial respecto de una medida en el espacio de estados. Los sistemas dinámicos inducidos por una transformación expansora son un paradigma que existen sistemas determinísticos cuyo comportamiento a largo plazo puede ser tan complejo que algunas propiedades similares a las propiedades estocásticas pueden ser observadas. Los sistemas expansores son un subclase de los sistemas llamados hiperbólicos, estudiados en los años 60 especialmente, cuyos comportamientos son similares a los presentados en esta nota.

Referencias

[1] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1987.
[2] C. Bonatti, L. J., Díaz, M. Viana, Dynamics beyond uniform hyperbolicity, Vol. 102 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 2005.
[3] M. Viana, Stochastic dynamics of deterministic systems, Lecture Notes 21st Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
[4] M. Viana, Lecture notes on attractors and physical measures, Vol. 8 of Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines [Monographs of the Institute of Mathematics and Related Sciences], Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima, 1999, a paper from the 12th Escuela Latinoamericana de Matemáticas (XII-ELAM) held in Lima, June 28–July 3, 1999.
[5] Y. Kifer, Ergodic theory of random perturbations, Birkhäuser, 1986.
[6] D. Ruelle, The thermodynamical formalism for expanding maps, Comm. Math. Phys. 125 (1989) 239–262.
[7] C. Liverani, Central limit theorem for deterministic systems, in: Procs. Intern. Conf. on Dynamical Systems (Montevideo 1995) – A tribute to Ricardo Mañé, Pitman, 1996, pp. 56–75.
[8] Y. Kifer, General random perturbations of hyperbolic and expanding transformations, J. Analyse Math. 47 (1986) 11–150.
[9] J. F. Alves, Statistical analysis of non-uniformly expanding dynamical systems, Lecture Notes 24th Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro, 2003.