Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 27–32

IIMAT

Ecuaciones diferenciales parciales lineales aritméticas☆☆

Ramiro Choque C.[1,1,]

Resumen

Las ecuaciones diferenciales parciales aritméticas $x'_p = a$, $x'_p = ax^n$ y sus casos particulares son estudiadas en [3], [7] y [8]. En este artículo generalizamos el estudio a las ecuaciones diferenciales parciales lineales aritméticas de orden superior de la forma $a_n x_p^{(n)} + a_{n-1} x_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 x'_p + a_0 x = b$. Analizamos ecuaciones con coeficientes constantes, y clasificamos en soluciones exponenciales y las que no lo son.

Palabras clave: Derivada aritmética, Derivadas parciales aritméticas, Ecuaciones diferenciales aritméticas

1. Introducción

La definición de derivada aritmética fue incluido en "Putnam Prize Competition" en 1950, y refinado por E.J. Barbeau [1] en su artículo "Remark on an Arithmetic Derivative" en 1961. La derivada aritmética inicialmente se define como 1 para los números primos y usando la factorización única en primos de un número natural y la regla del producto del cálculo se tiene la derivada aritmética de cualquier número natural. Las propiedades y el comportamiento de la derivada aritmética están directamente relacionados con algunas de las conjeturas más antiguas y estudiadas en la teoría de números elemental [2]. Sobre la historia de las derivadas aritméticas, sus generalizaciones y lista de referencias ver [7]. Ufnarovski y Ahlander [2] generalizaron este concepto a números racionales. Entre otras cosas, resolvieron ciertas ecuaciones diferenciales aritméticas. La idea de la derivada parcial aritmética se debe a Kovic [3] para enteros positivos; y en [7] estudian varias ecuaciones diferenciales parciales aritméticas de primer y segundo orden y enuncian conjeturas, que son probamos en [8].

En la segunda sección de este documento definimos la derivada aritmética mostrando que proviene de la derivada usual de Cálculo y damos las interpretaciones geométricas. En la tercera sección definimos una ecuación diferencial parcial lineal y la terminología asociada a este concepto. La cuarta sección es el estudio de las ecuaciones lineales de primer orden. La quinta sección es el estudio de las ecuaciones de segundo orden y su generalización a orden superior.

✉ rchoquec@gmail.com (Ramiro Choque C.)

2. La derivada parcial

Denotamos con el símbolo $\mathbb{Z}$ al conjunto de los número enteros, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, y $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ para el conjunto de los números primos.

Como consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética de los números enteros, se tiene la descomposición (única) en factores primos de un número racional $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots,$$

donde la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ son todos cero, salvo un número finito. Queda definida la función $v_{p_i} : \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ dado por $v_{p_i}(a) = \alpha_i$. Podemos escribir $a = \mathrm{sign}(a) \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(a)}$. Definimos $v_p(0) = 0$ para todo $p \in \mathbb{P}$. De esto se sigue que, si $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, existe único entero α y un número racional no cero $\frac{a}{b}$ tales que $x = \frac{a}{b} p^\alpha$ donde $p \nmid a$ y $p \nmid b$. Se sigue que $v_p(x) = \alpha$ que es denominado valuación p-ádica. Para la demostración de la siguiente proposición ver [9].

Proposición 2.1. *Sean $x, y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $p \in \mathbb{P}$. Entonces*

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
2. $v_p(x/y) = v_p(x) - v_p(y)$.
3. $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, *igualdad si* $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Diremos que el entero primo p divide al número racional a, denotado $p \mid a$, si $v_p(a) \neq 0$. También decimos que a es divisible por p o que p es factor de a. La expresión $p \nmid a$ significa que p no divide a. Por ejemplo $2 \mid \frac{3}{4}$ ya que $v_2(3/4) = -2$ es distinto de cero, y $5 \nmid \frac{3}{4}$ puesto que $v_5(3/4) = 0$. La proposición siguiente lista la propiedades básicas de divisibilidad que emplearemos con frecuencia.

Proposición 2.2. *Sean $a, b, x, y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $p \in \mathbb{P}$. Entonces*

1. *Si $p \mid a$ y $p \nmid x$, entonces $p \mid ax$*
2. *Si $p \mid a$ y $p \nmid b$, entonces $p \mid \frac{a}{b}$*
3. *Si $p \mid b$ y $p \nmid a$, entonces $p \mid \frac{a}{b}$*
4. *Si $p \mid a, b$; $p \nmid x, y$; $v_p(a) \neq v_p(b)$, entonces $p \mid ax + by$.*
5. *Si a es un entero, entonces la relación $\mid$ es la divisibilidad usual de $\mathbb{Z}$.*

El inciso 4 de la proposición anterior se generaliza mediante inducción matemática.

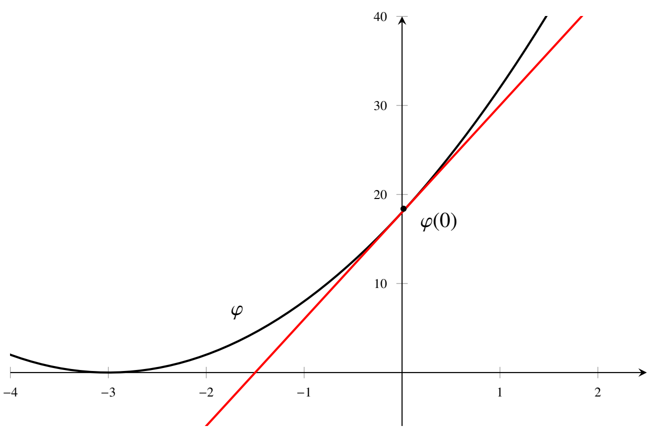
Corolario 2.1. *Si $p \mid a_1, a_2, \ldots, a_n$; $p \nmid x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $v_p(a_i) \neq v_p(a_j)$ para $i < j$, entonces $p \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.*

Sea a un número racional no cero tal que $a = \bar{a}p^{\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $\bar{a} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ Sea φ la función real dada por $\varphi(t) = \bar{a}(p+t)^{\alpha}$ para $t \in (-1, 1)$. La derivada parcial de a respecto de p es definida por

$$a'_p = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(0) = \frac{v_p(a)}{p}a.$$

De esto, podemos intuir que las derivada aritmética debería poseer algunas propiedades de la derivada usual de Cálculo. También con este resultado tenemos la interpretación usual de la derivada como la pendiente de la recta tangente de la función φ en cero. Por ejemplo $18'_3 = 12$ es la pendiente de la recta tangente en cero de $\varphi(t) = 2t^2 + 12t + 18$ tal como ilustra la figura 2.Como a es pro-

Derivada aritmética: $18'_3 = \varphi'(0)$



ducto de primos, representa área o volumen cuyos lados, o aristas son los factores primos respectivamente, y la derivada a'_p es interpretado como semiperímetro o semisuperficie. Una interpretación más general se describe en [4].

Como consecuencia de la proposición 2.1, tenemos

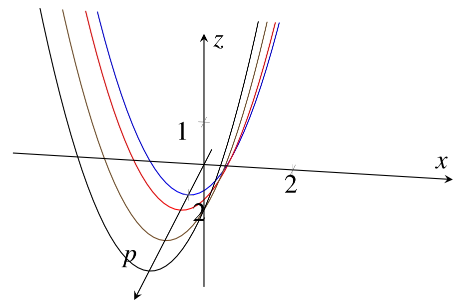
Proposición 2.3. *Sean $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $p \in \mathbb{P}$. Entonces*

1. $(ab)'_p = a'_pb + ab'_p$.
2. $(a^n)'_p = na^{n-1}a'_p$ *si* $n \in \mathbb{Z}^+$.
3. $(a/b)'_p = \dfrac{ba'_p - ab'_p}{b^2}$.

A la derivada parcial de a'_p respecto de p se denota por a''_p, es decir $a''_p = (a'_p)'_p$ que también se expresa con $a^{(2)}_p$. Del mismo modo se definen las derivadas parciales de orden superior.

3. Ecuaciones diferenciales aritméticas

Consideraremos funciones de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$. Por ejemplo: p^p, x^p, $px^2 + 2x + 1$, y $\frac{3}{x^2+p}$ donde $p \in \mathbb{P}$ y $x \in \mathbb{Q}$. La gráfica de la función $z = f(p, x)$ son curvas de nivel que corresponden a números primos. La siguiente figura ilustra la gráfica de $z = x^2+p$.



También consideraremos funciones en varias variables de la forma $z = f(p, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $p \in \mathbb{P}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$.

Una ecuación diferencial parcial aritmética de primer orden es la de forma

$$x'_p = f(p, x),$$

de segundo orden

$$x''_p = f(p, x, x'_p)$$

y de orden n

$$x^{(n)}_p = f(p, x, x'_p, \ldots, x^{(n-1)}_p).$$

Un ecuación diferencial parcial lineal de orden n es de la forma

$$a_nx^{(n)}_p + a_{n-1}x^{(n-1)}_p + \cdots + a_1x'_p + a_0x + b = 0.$$

Cuando $b = 0$, diremos que es una ecuación homogénea. Si los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son divisibles por p, diremos que es una ecuación con coeficientes constantes (respecto de p). Las constantes respecto de p, esto es las $x \in \mathbb{Q}$ tales que $p \nmid x$, son soluciones de la ecuación homogénea, que llamaremos soluciones constantes. Sólo trataremos con ecuaciones diferenciales parciales aritméticas, por simplicidad, llamaremos ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3.1. $5x''_2 + 15x'_2 - 3x = 7$ es una ecuación lineal con coeficientes constantes no homogénea, y la ecuación $x''_2 + 4x'_2 + 3x = 0$ es lineal homogénea y no es de coeficientes constantes.

La mayor parte de las ecuaciones son imposibles de resolver en forma explícita, pero es impotente saber en que condiciones se tiene al menos una solución, por ello enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración es inmediata.

Teorema 3.1.
1. *Si la ecuación $f(p,x) = 0$ con p un número primo fijo tiene una solución $\bar{x}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces la ecuación diferencial $x'_p = f(p,x)$ tiene al menos una solución, la solución constante $\bar{x}$.*
2. *Si $f(p, p^n) = np^{n-1}$ con p un número primo fijo y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la ecuación diferencial $x'_p = f(p,x)$ tiene al menos la solución $x = p^n$.*

En la secciones siguientes resolvemos las ecuaciones diferenciales parciales sistemáticamente. Hacemos énfasis a ecuaciones lineales y de coeficientes constantes. También son resueltas algunas ecuaciones con coeficientes no constantes.

4. Ecuaciones lineales de primer orden

Para $p \in \mathbb{P}$ y $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, las ecuaciones $x'_p = a$, y $x'_p = ax^n$ son estudiados en [7] y [8] tanto en la resolución y número de soluciones. En esta sección analizamos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y las que no lo son. El siguiente teorema es incluido por razones de interpretación y terminología.

Teorema 4.1. *Sea p un número primo con $p \nmid a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Entonces*

$$x'_p + ax = 0 \tag{1}$$

tiene solución $x = \bar{x}p^{-ap}$, donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución no cero de (1) tal que $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-1}$. Sustituyendo en (1) se tiene $\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-1} + a\bar{x}p^{\alpha p^k} = 0$. Esto es equivalente a

$$\alpha p^{k-1} + a = 0.$$

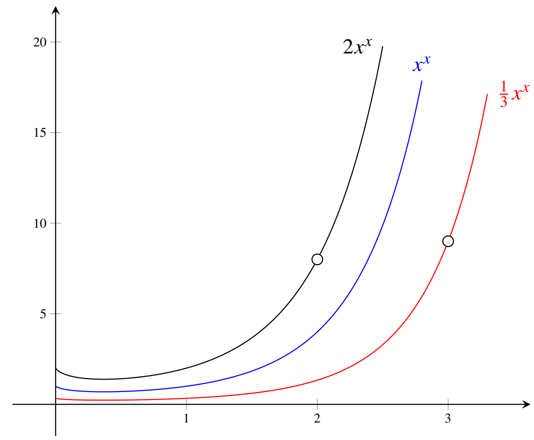
Si $k \neq 1$, se deduce que $p \mid a$ que contradice la hipótesis. Luego, debe ser $k = 1$, de donde $\alpha = -a$, que es un número entero por hipótesis, así $x = \bar{x}p^{-ap}$ es una solución, cuya verificación es inmediata. □

Un propiedad que caracteriza a las funciones exponenciales es que su derivada es proporcional a la misma función. La existencia de funciones exponenciales respecto a la derivada parcial aritmética, es una consecuencia del teorema anterior. En efecto. Sea $x = f(p)$ tal que $x'_p = x$, entonces, por el teorema anterior

$$f(p) = x = \bar{x}p^p, \quad p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}.$$

Definimos $f(0) = \bar{x}$. En general, si una expresión de la forma $\bar{x}p^{\alpha p^k}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, es una solución de alguna ecuación diferencial, diremos que es una *solución exponencial*, y si $\bar{x}p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}}$ es una solución, diremos que es una solución 2-exponencial, donde $\alpha_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}^+$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Cuando afirmemos que es una solución exponencial o que es 2-exponencial, supondremos que se satisface estas condiciones.

La extensión de estas funciones sobre los números racionales positivos poseen puntos donde la función no esta definida tal como muestra la siguiente figura



No es difícil probar que la ecuación $x'_p + ax = 0$ no tiene soluciones 2-exponenciales. En la siguiente sección mostraremos que existen ecuaciones lineales de orden superior que poseen soluciones 2-exponenciales.

En lo que sigue analizamos ecuaciones lineales no homogéneas.

Teorema 4.2. *Sean a, b números racionales no ceros y no divisibles por $p \in \mathbb{P}$. Entonces la ecuación*

$$x'_p + ax = b \tag{2}$$

no tiene soluciones exponenciales.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial de (2). Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-1}$. Sustituyendo en (2)

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-1} + a\bar{x}p^{\alpha p^k} = b. \tag{3}$$

Por hipótesis αp^k es no cero. Supongamos que $\alpha p^k + k - 1 = 0$, entonces $-\alpha p^k = k - 1$ que es no negativo, así $\alpha < 0$. Por inducción es fácil probar que $p^k > k - 1$ para todo entero positivo k. Pero

$$k - 1 = -\alpha p^k \geq p^k > k - 1$$

que es una contradicción. Luego $\alpha p^k + k - 1 \neq 0$. Ahora de (3) y corolario 2.1 se deduce que b es divisible por p que es una contradicción. □

Cuando los coeficientes no son constantes respecto de p, puede existir soluciones exponenciales o no. Un método para hallar una solución de una ecuación lineal no homogénea, consiste fundamentalmente en intuir la forma de una solución. Uno de los métodos utilizados es de coeficientes indeterminados, que emplearemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1. Consideremos la ecuación

$$x'_p + ax = bp^{kp} \tag{4}$$

donde a y b son racionales, no ceros y no divisibles por p, y k un entero positivo. Como el segundo miembro de (4) es una exponencial, y la derivada de una exponencial es otra exponencial, es coherente plantear una solución exponencial de la forma $x = \bar{x}p^{kp}$. Entonces $x'_p = k\bar{x}p^{kp}$. Sustituyendo en (4) $k\bar{x}p^{kp} + a\bar{x}p^{kp} = bp^{kp}$, simplificando $k\bar{x} + a\bar{x} = b$, luego $\bar{x}(k+a) = b$. Cuando $p \nmid (k+a)$, se tiene la solución exponencial

$$x = \frac{b}{k+a}p^{kp}.$$

Ejemplo 4.2. La ecuación $x'_p + ax = bp$ donde a y b son racionales no ceros que no son divisibles por el primo p, no tiene soluciones exponenciales. En efecto sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial. Entonces $\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-1} + a\bar{x}p^{\alpha p^k} = bp$, que es equivalente a

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k+k-2} + a\bar{x}p^{\alpha p^k-1} = b. \tag{5}$$

Como en el teorema 4.2 los factores potencia del primo p de (5) son no ceros, lo que implica que b es divisible por p que es una contradicción.

El siguiente teorema presenta las soluciones no exponenciales de las ecuaciones lineales de primer orden, exactamente son dos.

Teorema 4.3. *Supongamos que $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ tales que $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $m+1$ no son divisibles por p. Entonces la ecuación diferencial*

$$ax'_p + bp^n x = cp^m \tag{6}$$

tiene dos soluciones no exponenciales:

$$x = \frac{cp^{m+1}}{a(m+1) + bp^{n+1}}, \qquad x = \frac{cp^{m-n}}{a(m-n)p^{-1-n} + b}.$$

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (6) donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha-1}$. Sustituyendo en (6) $a\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} + bp^n\bar{x}p^\alpha = cp^m$ que podemos escribir en la forma

$$a\alpha\bar{x}p^{\alpha-1-m} + b\bar{x}p^{\alpha+n-m} = c. \tag{7}$$

Si $\alpha = m+1$, entonces $a(m+1)\bar{x} + b\bar{x}p^{1+n} = c$. La hipótesis garantiza que el factor $a(m+1) + bp^{n+1}$ no es cero ni divisible por p, luego $\bar{x} = \frac{c}{a(m+1)+bp^{n+1}}$ no es divisible por p, y por tanto $x = \frac{c}{a(m+1)+bp^{n+1}}p^{m+1}$ es una solución. Si $\alpha = m-n$, entonces de (7) $a(m-n)\bar{x}p^{-n-1} + b\bar{x} = c$. Por hipótesis, el factor $a(m-n)p^{-n-1} + b$ no es cero ni divisible por p, luego $\bar{x} = \frac{c}{a(m-n)p^{-n-1}+b}$ no es divisible por p, de donde $x = \frac{c}{a(m-n)p^{-n-1}+b}p^{m-n}$ es también una solución. Si $\alpha \in Z\backslash\{m+1, m-n\}$, de (7) y corolario 2.1 se deduce que $p \mid c$ que es una contradicción. □

Ahora consideremos ecuaciones cuya derivada parcial es una función polinomial con coeficientes no ceros constantes respecto de p. Para fijar ideas, analizamos la ecuación

$$x'_p = ax^2 + bx + c. \tag{8}$$

Claramente (8) no tiene soluciones exponenciales. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha-1}$. Sustituyendo en (8) tenemos

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} = a\bar{x}^2p^{2\alpha} + b\bar{x}p^\alpha + c. \tag{9}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $0 = a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c$, de donde $x = \bar{x}$ es la solución constante (si existe).

Si $\alpha = 1$, entonces de (9)

$$\bar{x} = a\bar{x}^2p^2 + b\bar{x}p + c.$$

Si esta ecuación tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x} \cdot p$ es una solución como es fácil de constatar.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$, entonces del corolario 2.1 y (9) se deduce $p \mid c$ que contradice lo asumido. Con el mismo argumento se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Sea $p \in \mathbb{P}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ no divisibles por p y a_n y a_0 no ceros. Entonces las soluciones de la ecuación*

$$x'_p = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{10}$$

son:

1. *soluciones constantes respecto de p (si existen)*
2. *$x = \bar{x} \cdot p$ donde $\bar{x}$ es una solución de la ecuación*

$$\bar{x} = a_n\bar{x}p^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x}p + a_0$$

tal que $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

El número de soluciones de la ecuación (10) es a lo más $2n$. El teorema 4.4 es un teorema de existencia. A continuación damos un resultado más específico cuando $n = 1$.

Teorema 4.5. *La ecuación diferencial parcial lineal aritmética de primer orden no homogénea con coeficientes constantes no ceros*

$$x'_p = ax + b \tag{11}$$

tiene exactamente dos soluciones, a saber: La solución $x = -\frac{b}{a}$, y $x = \frac{bp}{1-ap}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (11), donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Entonces (11) es equivalente a

$$\alpha p^{\alpha-1}\bar{x} = ap^\alpha\bar{x} + b. \tag{12}$$

Si $\alpha = 0$, la ecuación (12) se reduce a

$$0 = a\bar{x} + b.$$

De donde $\bar{x} = -\frac{b}{a}$ que es constante respecto de p, y tenemos la solución $x = -\frac{b}{a}$. Si $\alpha = 1$, la ecuación (12) se reduce a $\bar{x} = ap\bar{x} + b$, que podemos escribir en la forma

$$\bar{x}(1 - ap) = b.$$

Note que $1 - ap$ no es divisible por p, ni puede ser cero, así

$$\bar{x} = \frac{b}{1 - ap}.$$

Luego la solución en este caso es

$$x = \frac{b}{1 - ap} \cdot p.$$

Si $\alpha \in Z\backslash\{0, 1\}$, entonces de (12) se deduce $p \mid b$ que es una contradicción. □

Ejemplo 4.3. La ecuación diferencial $x'_2 = 3x - 15$ tiene dos soluciones. La solución constante $x = \frac{15}{3} = 5$ y la solución $x = \frac{-15\cdot 2}{1-3\cdot 2} = 6$.

Ejemplo 4.4. La ecuación $x'_3 = x^2 - 3x + 2$ tiene dos soluciones $x = 1$, $x = 2$ constantes respecto de 3, y la ecuación $x'_2 = x^2 - 3x + 3$ tiene una única solución, $x = 2$, que no es una solución constante.

La resolución de ecuaciones diferenciales asociadas a funciones racionales es análogo a las funciones polinomiales, pero el número de soluciones puede ser menor.

Teorema 4.6. *Sea $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$ no divisibles por p y a_0, a_n y b_m no ceros. Entonces*

$$x'_p = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \tag{13}$$

tiene a lo más máx$\{n, m + 1\}$ *soluciones.*

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (13), donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Sustituyendo en (13)

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} = \frac{a_n\bar{x}^n p^{\alpha n} + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}p^{\alpha(n-1)} + \cdots + a_1\bar{x}p^\alpha + a_0}{b_m\bar{x}^m p^{\alpha m} + a_{m-1}\bar{x}^{m-1}p^{\alpha(m-1)} + \cdots + b_1\bar{x}p^\alpha + b_0}. \tag{14}$$

Si $\alpha = 0$, la ecuación (14) se reduce a

$$0 = a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0.$$

Si esta ecuación tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x}$ es una solución de (13). Si $\alpha = 1$, entonces la ecuación (14) es equivalente a

$$\bar{x} = \frac{a_n\bar{x}^n p^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x}p + a_0}{b_m\bar{x}^m p^m + a_{m-1}\bar{x}^{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1\bar{x}p + b_0} \tag{15}$$

que es equivalente a una ecuación polinomial de grado a lo más máx$\{n, m + 1\}$. Si la ecuación (15) tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x} \cdot p$ es una solución. Si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$, de (14) se deduce que $p \mid a_0$ que es una contradicción. □

5. Ecuaciones lineales de orden superior

Una ecuación lineal de segundo orden es de la forma

$$ax''_p + bx'_p + cx + d = 0 \tag{16}$$

donde a, b, c y d son números racionales, $p \in \mathbb{P}$ y $a \neq 0$. Si p no divide a, b, c y d, es una ecuación con coeficientes constantes. Cuando $d = 0$ la ecuación es homogénea. No se pierde generalidad cuando se supone que a, b, c y d son números enteros.

Como es usual en ecuaciones diferenciales, primero estudiamos las ecuaciones homogéneas. En las ecuaciones homogéneas es natural buscar soluciones exponenciales.

Teorema 5.1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ con $p \nmid c$. Entonces la ecuación*

$$ax''_p + bx'_p + cx = 0 \tag{17}$$

tiene una solución de la forma $x = \bar{x}p^{\alpha p}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$ y α satisface la ecuación auxiliar $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, y otro solución de la forma $x = \bar{x}p^{\alpha p^2}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, y α satisface la ecuación auxiliar $ap^2\alpha^2 + (a + bp)\alpha + c = 0$. En ambas soluciones $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial de (17). Entonces

$$x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 1}$$
$$x''_p = \alpha(\alpha p^k + k - 1)\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 2}.$$

Sustituyendo en (17)

$$a\alpha(\alpha p^k + k - 1)\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 2} + b\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 1} + c\bar{x}p^{\alpha p^k} = 0.$$

Simplificando

$$a\alpha(\alpha p^k + k - 1)p^{k-2} + b\alpha p^{k-1} + c = 0. \tag{18}$$

Si $k = 1$, entonces de (18)

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Si esta ecuación tiene una solución α tal que $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $x = \bar{x}p^{\alpha p}$ es una solución. Si $k = 2$, entonces de (18) $a\alpha(\alpha p^2 + 1) + b\alpha p + c = 0$, así $\alpha \in \mathbb{Z}$ debe satisfacer la ecuación

$$ap^2\alpha^2 + (a + bp)\alpha + c = 0.$$

Si $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, tenemos la solución $x = \bar{x}p^{\alpha p^2}$. Si $k \in \mathbb{Z}\backslash\{1, 2\}$, entonces de (18) se deduce que $p \mid c$ que contradice la hipótesis. □

Ejemplo 5.1. La primera ecuación auxiliar de $x''_3 - 3x'_3 + 2x = 0$ es $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha = 1$, $\alpha = 2$. Como estos no son divisibles por 3, tenemos las soluciones $x = \bar{x} \cdot 3^3$ y $x = \bar{x} \cdot 3^6$ donde $3 \nmid \bar{x}$. La segunda ecuación auxiliar $9\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0$ no tiene soluciones. Las ecuaciones auxiliares de $x''_2 + 3x'_2 - 11x = 0$ son $\alpha^2 + 3\alpha - 11 = 0$ y $4\alpha^2 + 7\alpha - 11 = 0$. La primera ecuación no tiene soluciones enteras y la segunda sólo $\alpha = 1$ que no es divisible por 2. Luego la ecuación tiene solución $x = \bar{x} \cdot 2^4$ donde $2 \nmid \bar{x}$.

Ejemplo 5.2. La ecuación $x_2'' - 3x_2' + x = 0$ tiene una solución $x = 16 = 2^{2^2}$ que es 2-exponencial, pero $x_3'' - 3x_3' + x = 0$ no tiene soluciones 2-exponenciales. Este último ejemplo se puede generalizar a ecuaciones de orden superior como sigue.

Teorema 5.2. *Sea p es un número primo mayor a n y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números enteros que no son divisibles por p y a_0, a_n no ceros. Entonces la ecuación*

$$a_n x_p^{(n)} + a_{n-1} x_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 x_p' + a_0 x = 0. \tag{19}$$

no tiene soluciones 2-exponenciales.

Demostración. Sea $x = \bar{x} p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}}$ una solución 2-exponencial. Entonces $x_p' = \bar{x}\alpha_1 p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_2}} + \alpha_2 P^{\alpha_3} - 1}$. Denotemos $\alpha = \alpha_1 p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}} + \alpha_2 P^{\alpha_3}$ y $[\alpha]_n = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \cdots \cdot (\alpha - n + 1)$ el factorial polinomial de $\alpha \in \mathbb{Q}$. Luego

$$\begin{aligned}
x_p' &= \bar{x}\alpha_1 p^{\alpha - 1} \\
x_p'' &= \bar{x}\alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_1 p^{\alpha - 2} \\
x_p^{(3)} &= \bar{x}\alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_2 p^{\alpha - 3} \\
&\vdots \\
x_p^{(n)} &= \bar{x}\alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-1} p^{\alpha - n}
\end{aligned}$$

Al sustituir en (19) y simplificando el factor $\bar{x} p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 P^{\alpha_3}}}$

$$\begin{aligned}
&a_n \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-1} p^{\alpha_2 P^{\alpha_3} - n} + a_{n-1}\alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-2} p^{\alpha_2 P^{\alpha_3} - (n-1)} + \\
&\cdots + a_1 \alpha_1 p^{\alpha_2 P^{\alpha_3} - 1} + a_0 = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Como $p > n$, las potencias de p en (20) son no ceros, se deduce que $p \mid a_0$ que contradice la hipótesis. □

Es inmediato verificar que cualquier función exponencial no satisface la ecuación no homogénea (16), así sólo planteamos soluciones de la forma $x = \bar{x} p^{\alpha}$ donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ y $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$. A tales soluciones llamaremos no exponenciales.

Teorema 5.3. *Sea p es un primo impar y a, b, c y d enteros no ceros no divisibles por p. Entonces*

$$a x_p'' + b x_p' + c x + d = 0 \tag{21}$$

tiene exactamente tres soluciones no exponenciales:

$$x = -d/c, \qquad x = \frac{-d}{b + cp} p, \qquad x = \frac{-d}{2a + 2bp^2 + cp^2} p^2.$$

Demostración. Sea $x = \bar{x} p^{\alpha}$ una solución no exponencial. Entonces

$$\begin{aligned}
x_p' &= \alpha \bar{x} p^{\alpha - 1}, \\
x_p'' &= \alpha(\alpha - 1) \bar{x} p^{\alpha - 2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (21)

$$a\alpha(\alpha - 1)\bar{x} p^{\alpha - 2} + b\alpha \bar{x} p^{\alpha - 1} + c\bar{x} p^{\alpha} + d = 0. \tag{22}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $c\bar{x} + d = 0$, de donde $x = -d/c$ es una solución. Si $\alpha = 1$, entonces $b\bar{x} + c\bar{x}p + d = 0$, así $(b + cp)\bar{x} + d = 0$. Note que $b + cp$ no puede ser cero ni divisible por p. De donde $x = \frac{-d}{b+cp} p$ es una solución. Si $\alpha = 2$, entonces $2a\bar{x} + 2b\bar{x}p + c\bar{x}p^2 + d = 0$. Factorizando $(2a + 2bp + cp^2)\bar{x} + d = 0$. Otra vez $2a + 2bp + cp^2$ no es cero ni divisible por p. De donde $x = \frac{-d}{2a + 2bp^2 + cp^2} p^2$ es una solución. □

Ejemplo 5.3. La ecuación $x_3'' + x_3' + x - 1 = 0$ tiene tres soluciones $1, 3/4$ y $9/17$.

Ejemplo 5.4. Las ecuaciones lineales se pueden resolver formando un sistema de ecuaciones diferenciales tal como ilustra el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación lineal

$$a_7'' - 5a_7' + 6a = 0. \tag{23}$$

Sea $x = a$, $y = a_7'$. Entonces $x_7' = y$, $y_7' = -6x + 5y$. Para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$, tenemos

$$X_7' = \begin{pmatrix} x_7' \\ y_7' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -6x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} X = AX.$$

Supongamos que $X = p^{\alpha p} \xi$ es una solución. Luego

$$\alpha p^{\alpha p} \xi = A p^{\alpha p} \xi$$

de donde $A\xi = \alpha\xi$, que significa que $\alpha \in \mathbb{Z}$ es un autovalor y ξ es un autovector de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ con entradas racionales. Con un cálculo rutinario se establece que $\bar{a} \cdot 7^{14}$ y $\bar{a} \cdot 7^{21}$ son soluciones de (23), donde $7 \nmid \bar{a} \in \mathbb{Q}$.

Referencias

[1] E. J. Barbeau, Remarks on an arithmetic derivative, Canad. Math. Bull. 4(2), 117–122 (1961).

[2] V. Ufnarovski, B. Ahlander, How to differentiate a number Journal of Integer Sequences, Vol. 6, 2003.

[3] J. Kovic, The arithmetic derivative and antiderivative, J. Integer Seq. 15 (2012), Article 12.3.8.

[4] David W. Wilson, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A003415

[5] P. Haukkanen, M. Mattila, J. K. Merikoski, and T. Tossavainen, Can the arithmetic derivative be defined on a non-unique factorization domain? J. Integer Seq. 16 (2013)

[6] R. K. Mistri and R. K. Pandey, Derivative of an ideal in a number ring, Integers 14 (2014), # A24.

[7] P. Haukkanen, J. K. Merikoski, T. Tossavainen, On arithmetic partial differential equations, J. Integer Seq. 19, Article 16.8.6 (2016).

[8] Ram Krishna Pandey and Rohit Saxena, On Some Conjectures about Arithmetic Partial Differential Equations, Journal of Integer Sequences, Vol. 20 (2017)

[9] Fernando Q Gouvêa. p-adic Numbers. Springer, 1997.