Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática

Revista Boliviana de Matemática – UMSA 04 (2020) 22–26

IIMAT

Condiciones de Existencia de Soluciones de una Inclusión Diferencial

Condori-Equice Willy[a,1]

[a] *Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia*

Resumen

En este trabajo desarrollamos condiciones necesarias para la existencia de soluciones de una inclusión diferencial cuando se da una condición inicial. Desarrollamos condiciones que involucran los conceptos de semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior.

Palabras clave: Multifunción, Semicontinuidad Superior, Semicontinuidad Inferior, Inclusión Diferencial.

Introducción

Este es un trabajo monográfico, resultado de una investigación bibliográfica y se presenta a fin de justificar las actividades de investigación dentro del Instituto de Investigación Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés. No pretende presentar resultados originales. Esta desarrollado en base a [3].

En la primera sección se describen los conceptos de multifunción, semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior; y se dan algunos resultados que caracterizan los conceptos de semicontinuidad. En la segunda sección, se plantea el problema tipo problema de Cauchy para una inclusión diferencial, donde se destaca la multifunción que esta a lado derecho de la inclusión diferencial. En las dos ultimas secciones se plantean los resultados de existencia de soluciones del problema planteado, manejando condiciones de semicontinuidad supeirior y semicontinuidad inferior, respectivamente.

1. Preliminares

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una *multifunción* φ de X a Y es una aplicación que asigna a cada x en X un único subconjunto $\varphi(x)$ de Y, es decir, a cada $x \in X$, le hace corresponder $\varphi(x) \subset Y$. Para denotar una multifunción de X a Y escribimos $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$. También decimos que φ es una aplicación punto a conjunto de X en Y.

Sean $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una multifunción y A un subconjunto de Y. La *imagen inversa superior* de A, denotada por $\varphi_s^{-1}(A)$, se define como

$$\varphi_s^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \subset A\}.$$

La *imagen inversa inferior* de A, denotada por $\varphi_i^{-1}(A)$, se define como

$$\varphi_i^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.1. Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una multifunción.

a) Se dice que φ es *semicontinua superiormente* en $x \in X$, si para todo abierto W en Y tal que $\varphi(x) \subset W$, existe un abierto V en X que contiene a x que satisface

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) \subset W.$$

b) Se dice que φ es *semicontinua inferiormente* en $x \in X$ si para todo abierto W en Y tal que $\varphi(x) \cap W \neq \emptyset$, existe un abierto V en X que contiene a x y satisface

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) \cap W \neq \emptyset.$$

c) Se dice que φ es *continua* en $x \in X$, si es semicontinua superiormente e inferiormente en x.

✉ wcondori@gmail.com (Condori-Equice Willy)

La multifunción φ es semicontinua superiormente (inferiormente) en X, si lo es en cada punto x de X, análogamente φ es continua en X si lo es en todo punto x de X.

Ejemplo 1.1. La multifunción $\varphi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x < 1, \\ [0,1] & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

es semicontinua superiormente en $[0,1]$, semicontinua inferiormente en $[0,1)$, pero no es semicontinua inferiormente en 1. En efecto, primero mostremos que φ no es semicontinua inferiormente en 1. Supongamos lo contrario y tomemos el conjunto abierto $U = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$; como

$$U \cap \varphi(1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cap [0,1] \neq \emptyset,$$

existe un abierto V que contiene a 1 tal que

$$\varphi(z) \cap U \neq \emptyset, \text{ para todo } z \in V;$$

pero existe $z \in V$, $z < 1$, y

$$\varphi(z) \cap U = \{0\} \cap \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \emptyset.$$

Así, φ no puede ser semicontinua inferiormente en 1.

Para probar la semicontinuidad superior de φ en 1, consideremos un conjunto abierto U que contiene a $\varphi(1) = [0,1]$; tomemos el abierto $V = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ en $[0,1]$ que contiene a 1. Luego, si

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) = \{0\} \text{ o } \varphi(z) = [0,1] \Rightarrow \varphi(z) \subset [0,1] \subset U.$$

Así, φ es semicontinua superiormente en 1.

Probemos ahora que φ es continua en $[0,1)$. Para esto tomemos $x \in [0,1)$ y U un abierto que intersecte a $\varphi(x) = \{0\}$; luego $0 \in U$. Tomemos el abierto $V = [0,1)$, luego

$$\varphi(z) = \varphi(x) = \{0\} \subset U, \text{ para todo } z \in V;$$

por lo tanto φ es continua en $[0,1)$.

Ejemplo 1.2. La multifunción $\psi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } x < 1, \\ \{0\} & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente en $[0,1]$, semicontinua superiormente en $[0,1)$, pero no es semicontinua superiormente en $[0,1]$.

Primero demostraremos que ψ no es semicontinua superiormente en 1. Tomemos el abierto $U = \left[0, \frac{3}{4}\right)$ que contenga a $\psi(1) = \{0\}$ y sea V un abierto que contenga a 1. Entonces, existe $z \in V$ y $z < 1$, de donde $\psi(z) = [0,1]$ no está contenido en $U = \left[0, \frac{3}{4}\right)$ y por lo tanto ψ no es semicontinua superiormente en 1.

Probaremos ahora que ψ es semicontinua inferiormente en 1. Sea U un conjunto abierto que intersecte a $\psi(1) = \{0\}$. Luego, $0 \in U$. Tomemos $V = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ y si $z \in V$, entonces $\psi(z) = [0,1]$ o $\psi(z) = \{0\}$; en cualquiera de los casos $0 \in \psi(z) \cap U$. Por tanto, ψ es semicontinua inferiormente en 1.

Para probar la semicontinuidad superior de ψ en $[0,1)$, tomemos $x \in [0,1)$ y U un abierto que contenga a $\psi(x) = [0,1]$. Para $V = [0,1)$, si $z \in V$ entonces

$$\psi(z) = [0,1] \subset U.$$

Por lo que ψ es semicontinua superiormente en $[0,1)$.

Ahora para la semicontinuidad inferior en $[0,1)$, supongamos que $x \in [0,1)$ y que U es un abierto que intersecta a $\psi(x) = [0,1]$. Luego, para el abierto $V = [0,1)$ que contiene a x, si $z \in V$ entonces

$$\psi(z) \cap U = [0,1] \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto ψ es semicontinua inferiormente en $[0,1)$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la semicontinuidad superior de una multifunción entre espacios topológicos, en términos de conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema 1.1. *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una multifunción entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *φ es semicontinua superiormente en X.*
ii) *$\varphi_s^{-1}(A)$ es abierto en X para todo conjunto abierto A en Y.*
iii) *$\varphi_i^{-1}(F)$ es cerrado en X para todo conjunto cerrado F en Y.*

Teorema 1.2. *Si $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ es una multifunción entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *φ es semicontinua inferiormente en X.*
ii) *$\varphi_i^{-1}(A)$ es abierto en X si A es abierto en Y.*
iii) *$\varphi_s^{-1}(F)$ es cerrado en X si F es cerrado en Y.*

Teorema 1.3. *Sean X, Y espacios métricos y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una multifunción. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *φ es semicontinua inferiormente en x.*
ii) *Para cada sucesión (x_n) en X, tal que $x_n \to x$, y para cada $y \in \varphi(x)$; existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$y_n \to y \quad \text{y} \quad y_n \in \varphi(x_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

iii) *Para cada sucesión (x_n) en X, tal que $x_n \to x$, y para cada $y \in \varphi(x)$; existen una sucesión (y_k) y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que*

$$y_k \to y \quad \text{y} \quad y_k \in \varphi(x_{n_k}), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.4. *Sean X, Y espacios métricos y una multifunción $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$. Los siguientes enunciados son equivalentes :*

i) *φ es semicontinua superiormente en x y $\varphi(x)$ es compacto.*
ii) *Para cada sucesión $((x_n, y_n))$ en el $Gr\varphi$, tal que $x_n \to x$, se tiene que la sucesión (y_n) tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$.*

2. Planteo del Problema

En un curso elemental de ecuaciones diferenciales uno trata con el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x) \quad \text{y} \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

donde $f : J \times X \to X$, $J = [0, a]$ y $x_0 \in X = \mathbb{R}^n$. Las soluciones (globales) son funciones $x : J \to X$ de clase C^1 que satisfacen (1) y estas existen si f es continua y no crece tan rápido con respecto a x, es decir,

$$|f(t, x)| \le c(1 + |x|), \tag{2}$$

sobre $J \times X$ para algún $c > 0$, donde $|\cdot|$ denota la norma euclideana sobre X. La manera más simple de probar tal resultado es considerar la ecuación integral equivalente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \tag{3}$$

sobre J y aplicar un apropiado teorema de punto fijo al operador definido por el lado derecho de (2) sobre $C_X(J)$.

El mismo argumento también da una solución de (3) si f es sólo medible en t, continua en x y tal que (2) se dá para alguna función $c \in L^1(J)$, como fue observado por C. Caratheodory. Luego, el lado derecho de (3) es derivable c.t.p., de donde $x(\cdot)$ es una solución absolutamente continua de (1), es decir,

$$x' \in L^1_X(J) \quad \text{y} \quad x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s)\, ds$$

sobre J y $x' = f(t, x)$ casi en todas partes sobre J.

Mucho después este concepto de solución fue apreciado por la gente que trabaja en teoría de control, relacionada con problemas donde el lado derecho de la ecuación también depende de una función de control $u : J \to \mathbb{R}^m$. Las más interesantes funciones de control son las funciones "switch" $u : J \to \{-1, 1\}$, luego $f(\cdot, x, u(\cdot))$ puede ser discontinua. Desde muchos años, uno es consciente que sólo soluciones que satisfagan ciertas restricciones, como $x(t) \in D \subset X$ sobre J, son de interés en muchas aplicaciones. Como se verá mas adelante,

$$f(t, x) \in T_D(x) \quad \text{sobre } [0, a) \times D \tag{4}$$

es la condición correcta para obtener una solución $x(\cdot)$ en el conjunto cerrado D si $x_0 \in D$ y la función continua f satisface (2).

El propósito de esta sección es mostrar cuanto se puede lograr si el lado derecho es una multifunción. En la siguente sección comenzamos con el caso semicontinuo superiormente, que aparece muy a menudo en aplicaciones.

3. Lado Derecho Semicontinuo Superiormente

Dados $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, un subconjunto cerrado D de X, una multifunción $F : J \times D \twoheadrightarrow X$ de imágenes no vacías y $x_0 \in D$, buscamos soluciones absolutamente continuas de

$$x' \in F(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Además, similarmente a lo presentado en (3), se tiene

$$\|F(t, x)\| \le c(t)(1 + \|x\|) \tag{6}$$

sobre $J \times D$, donde $\|F(t, x)\| = \sup\{|y| : y \in F(t, x)\}$ y $c \in L^1(J)$. También es obvio que una forma más débil de (4) está dado ahora por

$$F(t, x) \cap T_D(x) \ne \emptyset \quad \text{sobre } [0, a) \times D \tag{7}$$

donde

$$T_D(x) = \left\{ y \in X : \liminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \rho(x + \lambda y, D) = 0 \right\} \tag{8}$$

para todo $x \in D$. Bajo estas suposiciones, sin perdida de generalidad reemplazamos (6) por

$$\|F(t, x)\| \le 1 \quad \text{sobre } J \times D \tag{9}$$

siempre que sea conveniente.

Lema 3.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $D \subset X$ cerrado y $F : D \twoheadrightarrow X$ una multifunción tal que $F(x) \ne \emptyset$ para todo $x \in D$. Si*

(a) F es semicontinua superiormente y $F(x)$ es convexo y cerrado para todo $x \in D$,

(b) $\|F(x)\| \le c(1 + |x|)$ sobre D para algún $c > 0$, y

(c) $F(x) \cap T_D(x) \ne \emptyset$ sobre D;

entonces (5) tiene una solución sobre $\mathbb{R}_+$ para cada $x_0 \in D$.

Teorema 3.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, una multifunción $F : J \times D \twoheadrightarrow X$ semicontinua superiormente tal que $F(x) \ne \emptyset$ para todo $x \in D$ y que toma valores convexos y cerrados, y que satisface (6) y (7). Entonces, (5) tiene una solución sobre J.*

Demostración. Considere $X_0 = \mathbb{R} \times X$ con $|(\tau, x)| = |\tau| + |x|$, sea $D_0 = J \times D$ y $F_0 : D_0 \twoheadrightarrow X_0$ definido por $F_0(\tau, x) = \{1\} \times F(\tau, x)$. Luego es fácil ver que para $(\tau, x) \in D_0$ con $\tau < a$ tenemos

$$(1, y) \in F_0(\tau, x) \cap T_{D_0}(\tau, x) \Leftrightarrow y \in F(\tau, x) \cap T_D(x).$$

Por la prueba del anterior lema, es claro que podemos aplicar este resultado para X_0, D_0, F_0 y el valor inicial $(0, x_0)$. Así, la primera componente de esta solución es $\tau(t) = t$ y la segunda es la solución de (5). □

4. Lado Derecho Semicontinuo Inferiormente

Buscamos soluciones absolutamente continuas de

$$x' \in F(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0 \in D, \tag{10}$$

donde $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X = \mathbb{R}^n$ y $F : J \times D \twoheadrightarrow X$ son dados. Ahora asumimos que F es semicontinua inferiormente o que $F(\cdot, x)$ es medible y $F(t, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. No podemos esperar soluciones por medio de soluciones aproximadas, ya que si $x_n \in Gx_n + y_n$ con $y_n \to 0$, $x_n \to x$ y G es semicontinua inferiormente, entonces lo mejor que podemos obtener es que $x \in \operatorname{lím} Gx_n$, pero Gx puede ser más pequeño que este límite. Ahora, resultados como el teorema de selección de Michael sugiere buscar selecciones f de F que son suficientemente buenas para obtener soluciones de (10) al resolver

$$x' = f(t,x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0 \in D. \tag{11}$$

Así, si mantenemos la condición más simple

$$\|F(t,x)\| \leq c(t)(1+|x|) \quad \text{sobre } J \times D, \quad \text{con } c \in L^1(J) \tag{12}$$

entonces se obtiene el siguente teorema de existencia.

Teorema 4.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0,a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, $F : J \times D \twoheadrightarrow X$ con $F(t,x) \neq \emptyset$ sobre $J \times D$. Si F es semicontinua inferiormente con valores cerrados y convexos, y satisface (12) y*

$$F(t,x) \subset T_D(x) \quad \text{sobre } [0,a) \times D, \tag{13}$$

entonces (10) tiene solución sobre J.

Aquí, obtenemos además una solución C^1, ya que F tiene una selección continua f.

El punto más interesante de esta sección es mostrar que, a diferencia del caso semicontinuo superiormente, la condición de convexidad de los valores de F es redundante. Como mencionamos antes, el teorema de selección de Michael falla cuando $F(t,x)$ no es convexo. Antes de entrar en detalles, primero establecemos lo que queremos probar.

Teorema 4.2. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0,a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, $F : J \times D \twoheadrightarrow X$ con $F(t,x) \neq \emptyset$ sobre $J \times D$. Si F es semicontinua inferiormente con valores cerrados y, satisface (13) y*

$$\|F(t,x)\| \leq c(1+|x|) \quad \text{sobre } J \times D,$$

entonces (10) tiene solución sobre J.

Note que, por medio de reducciones, podemos asumir sin perdida de generalidad que D es compacto y que F satisface

$$\|F(t,x)\| \leq 1$$

sobre $J \times D$. Luego, sea f una selección de F y consideremos la multifunción

$$\tilde{F}(t,x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\operatorname{conv}} f\left((J \times D) \cap \overline{B}_\delta(t,x)\right);$$

y el problema

$$x' \in \tilde{F}(t,x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0. \tag{14}$$

Ya que $f(t,x) \in \tilde{F}(t,x) \cap T_D(x)$, el problema (14) tiene una solución, por el teorema (3.1). Mostraremos que esta solución es la solución de (11). La idea es hallar condiciones sobre f que garanticen que (11) y (14) tengan el mismo conjunto solución y luego mostrar que F tiene una selección que satisfaga estas condiciones.

En relación al primer punto, note que una solución de (14) satisface $|x'(t)| \leq 1$ casi en todas partes de $J \times D$, ya que $\|f(t,x)\| \leq 1$; luego $|x(t) - x(s)| \leq |t-s|$ para todo $t \in J$, de donde $(t, x(t)) \in (s, x(s)) + K_\alpha$para $t \geq s$, donde K_α es un cono en $\mathbb{R}^{n+1}$, esto es,

$$K_\alpha = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq \alpha t\right\} \quad \text{con } \alpha \geq 1. \tag{15}$$

Ahora, los conjuntos solución coinciden si f es continua, ya que luego (14) es (11), pero también es fácil ver que ello se da si f es sólo continua sobre K_α con $\alpha > 1$, esto es, para toda sucesión $(t_n, x_n) \in (t,x) + K_\alpha$ tal que $(t_n, x_n) \to (t,x)$, se tiene que $f(t_n, x_n) \to f(t,x)$.

Lema 4.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0,a] \subset \mathbb{R}$ y $D \subset X$ cerrado. Supongamos además que $f : J \times D \to X$ es continua a lo largo de K_α con $\alpha > 1$, $\|f(t,x)\| \leq 1$ sobre $J \times D$ y $f(t,x) \in T_D(x)$ sobre $[0,a) \times D$. Entonces, (11) tiene una solución absolutamente continua sobre J y los conjuntos solución de (11) y (14) son iguales.*

Demostración. Sea x una solución de (14). Entonces, $J = \bigcup_{n \geq 0} J_n$ con $\mu(J_0) = 0$ y para $n \geq 1$, los conjuntos J_n son disjuntos, cerrados, $x'|_{J_n}$es continua y $x'(t) \in \tilde{F}(t, x(t))$ sobre J_n. Sea $J_n \setminus N_n$ los puntos de densidad de J_n, y sean $t \in J_n \setminus N_n$. Luego, hallamos $t_k \in J_n \cap (t, \infty)$ con $t_k \to t$, de donde $x'(t_k) \to x'(t)$ y

$$(s,y) \in (t, x(t)) + K_\alpha \quad \text{si } (s,y) \in \bar{B}_{\delta_k}(t_k, x(t_k)),$$

donde δ_k es suficientemente pequeño. De esta forma $x' = f(t,x)$ sobre $(J \setminus J_0) \setminus \bigcup_{n \geq 1} N_n$, es decir x es solución de (11). □

Así, el paso final para la demostración del teorema (3.1) se prueba.

Lema 4.2. *Sean $X = \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R} \times X$ compacto, $F : M \twoheadrightarrow X$ ($F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in M$) semicontinua inferiormente con valores cerrados y K es el cono K_α de (15). Entonces F tiene un selección continua a lo largo de K. Tenemos el mismo resultado, si M es localmente compacto.*

Demostración. Siguiendo el procedimiento estandar de la prueba de Michael, primero construimos una buena selección aproximada y luego procedemos de manera usual. Para $\omega \in M$ consideramos los entornos $W(\omega)$ de la forma $M \cap (\tilde{\omega} + K_\delta)$, con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R} \times X$ y $K_\delta = K \cap ([0,\delta) \times X)$ para $\delta > 0$, tal que $\omega \in \operatorname{int}(W(\omega))$, donde el interior se entiende relativo a M.

1. Sea $V = B_\epsilon(0)$. Ya que F es semicontinua inferiormente, tenemos que $F^{-1}(y - V)$ es abierto en M, y para $\omega \in F^{-1}(y - V)$ encontramos $W(\omega) \subset F^{-1}(y - V)$. Ya que $\omega \in F^{-1}(y - V)$ para $y \in F(\omega)$ y M es compacto, tenemos $M = \bigcup_{i=1}^m W_i$ con $W_i = W(\omega_i) \subset F^{-1}(y - V)$. Hacemos los W_i disjuntos al definir $M_1 = W_1$ y $M_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} W_j$ para $i \geq 2$, y defina

$f : M \to X$ tal que $f(\omega) = y_i$ sobre M_i, para $i = 1, \dots, m$. Evidentemente, tenemos $f(\omega) \in F(\omega) + V$ sobre M. Si

$$\omega_0 \in M_i, \quad \omega_n \in (\omega_0 + K) \cap M \quad \text{y} \quad \omega_n \to \omega_0,$$

entonces $\omega_n \in (\omega_0 + K_\delta) \cap M \subset M_i$ para algún $\delta > 0$ pequeño y n muy grande; luego $f(\omega_n) = y_i = f(\omega_0)$ para este n y de esta manera f es constante por pedazos y continua sobre K.

2. Sea $V_k = B_{2^{-k}}(0)$. Obtenemos funciones $f_k : M \to X$ que son constantes por pedazos, continuas a lo largo de K y tal que para todo $\omega \in M$

$$\begin{aligned} f_k(\omega) \in & f_{k-1}(\omega) + 2V_{k-1} \quad \text{para } k \geq 2, \\ f_k(\omega) \in & F(\omega) + V_k \quad \text{para } k \geq 1. \end{aligned} \tag{16}$$

En efecto, el primer paso con $\epsilon = 1/2$ da f_1, y dados $f_1, \dots f_k$, consideramos f_k como la f del primer paso con $\epsilon = 2^{-k}$. Ya que $G(\omega) = F(\omega) \cap (y_i + V_k)$ es semicontinua inferiormente sobre el compacto $\bar{M}_i$ y no necesitamos tener valores cerrados para utilizar el argumento del primer paso, hacemos para $\bar{M}_i$, G y V_{k+1} lo que hicimos en el primer paso para M, F y V. Así obtenemos

$$\bar{M}_i = \bigcup_{l=1}^{p} \bar{M}_i^l,$$

donde los conjuntos $\bar{M}_i^l$ son disjuntos, luego

$$M_i = \bigcup_{l=i}^{p} \bar{M}_i^l \cap M_i,$$

y podemos continuar con M_i en vez de M en el primer paso para obtener f_{k+1} sobre M_i, y esto para $i = 1, 2, \dots, m$. Evidentemente, (16) implica que $f_k \to f$ uniformemente sobre M, para algún f que es continua a lo largo que K y que satisface $f(\omega) \in F(\omega)$ sobre M.

3. Sea M localmente compacto, es decir, cada $\omega \in M$ tiene un entorno $U(\omega)$ con clausura compacta. Entonces esta cobertura abierta tiene un refinamiento $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Así, como $\bar{U}_\lambda$ es compacto, tenemos

$$\bar{U}_\lambda \subset \bigcup_{l=1}^{m_\lambda} W_\lambda^l \quad \text{con } W_\lambda = W(\omega_\lambda^l),$$

para cada $\lambda \in \Lambda$, y un buen orden $\leq$ de

$$\left\{ W_\lambda^l : \lambda \in \Lambda, \, l = 1, \dots, m_\lambda \right\}.$$

De esta forma podemos tomar los W_λ^l disjuntos al definir

$$\begin{aligned} M_\lambda^l &= W_\lambda^l \setminus \bigcup W_\mu^j, \quad \text{con} \\ N(l, \lambda) &= \left\{ (j, \mu) : \; W_\mu^j < W_\lambda^l \quad \text{y} \quad W_\mu^j \cap W_\lambda^l \neq \emptyset \right\}, \end{aligned}$$

donde $W < \tilde{W}$ significa $W \leq \tilde{W}$ y $W \neq \tilde{W}$. Evidentemente, los M_λ^l juntos cubren M. Por el caso compacto, hallamos una selección f_λ^l continua a lo largo de K sobre $\bar{M}_\lambda^l$, y definimos $f : M \to X$ por $f(\omega) = f_\lambda^l(\omega)$. Entonces f es una selección de F continua a lo largo de K; recuerde que $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finito, luego $M \cap B_\rho(\omega_0)$ intersecta solo un número finito de W_λ^l si ρ es suficientemente pequeño, y de esta manera $(\omega_0 + K_\delta) \cap M \subset M_\lambda^l$ si $\omega_0 \in M_\lambda^l$ y δ es suficientemente pequeño.

□

5. Conclusiones

En este artículo se presentaron condiciones necesarias para que una inclusión diferencial, con condición inicial, admita una solución.

Se consideraron dos tipos de condiciones principales, semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior; cada una de ellas junto a otras condiciones, dan dos condiciones de existencia diferentes. Dedicamos una sección para cada uno de los dos criterios. Los resultados principales están dados en los teoremas 3.1 y 4.2.

En un sentido extendido tipo Caratheodory, para ecuaciones diferenciales ordinarias, se pueden trabajar condiciones de existencia que admitan soluciones absolutamente continuas para una inclusión diferencial; estas condiciones constituyen un trabajo futuro si se quiere seguir trabajando en esta linea.

Referencias

[1] Aubin J.-P., Cellina A., Differential Inclusions, Springer, 1984.

[2] Aubin J.-P., Frankowska H., Set-Valued Analysis, Birkhauser, 1990.

[3] Deimling Klaus, Multivalued Differential Equations, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter (Ed.), Berlin - New York, 1992.

[4] Macky J., Strauss A., Introduction to Optimal Control Theory, Springer, 1982.

[5] Munkres J., Topology, Prentice Hall, 2000.